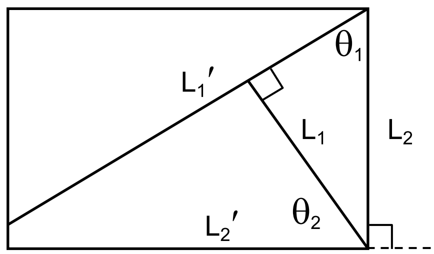
ภาคผนวก

ก. รูปทรงระนาบ (Plane Geometry)

1. เมื่อเส้นตรง 2 เส้นที่ตัดกัน (L_1 กับ L_2) ตั้งฉากกับเส้นตรงอื่นอีก 2 เส้น (L_1' กับ L_2') มุมระหว่างเส้นตรงคู่ดังกล่าวจะเท่ากัน $\theta_1=\theta_2$ ดังแสดงในรูป

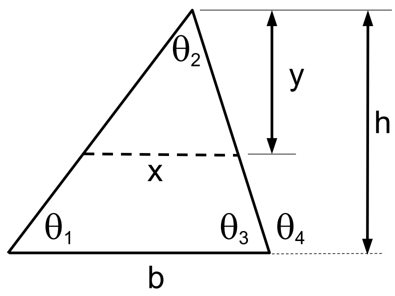


$\theta_1=\theta_2$

2. สามเหลี่ยม

ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{x}{y}=\frac{b}{h}$$



ความสัมพันธ์ของมุมของสามเหลี่ยม

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^o$$

$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$$

พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}bh$

โดยฐาน b หมายถึงด้านที่มีมุมฐาน $\theta \le 90^o$

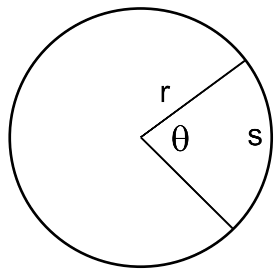
4. วงกลม

ความยาวเส้นรอบรูปวงกลม = $2\pi r$

พื้นที่วงกลม = πr^2

ความยาวส่วนโค้ง $s = r\theta$

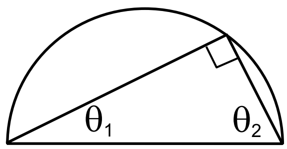
พื้นที่เซคเตอร์ $=\frac{1}{2}r^2\theta$



หมายเหตุ: มุม θ ที่ใช้คำนวณต้องอยู่ในหน่วย “เรเดียนต์”

5. สามเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในครึ่งวงกลมเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเสมอ

$$\theta_1+\theta_2 = 90^o$$



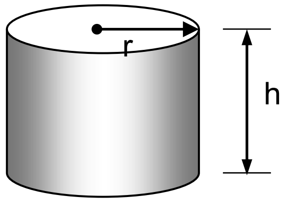
ข. รูปทรงตัน (Solid Geometry)

1. ทรงกระบอก

ปริมาตร = $\pi r^2 h$

พื้นที่ผิวข้าง (lateral area) = $2\pi rh$

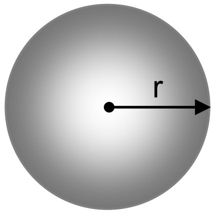
พื้นที่ผิวทั้งหมด = $2\pi rh + 2\pi r^2$



2. ทรงกลม (sphere)

ปริมาตร = $\frac{4}{3}\pi r^3$

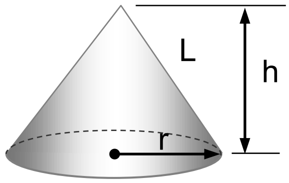
พื้นที่ผิว = $4\pi r^2$



3. กรวยกลม (circular cone)

ปริมาตร = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

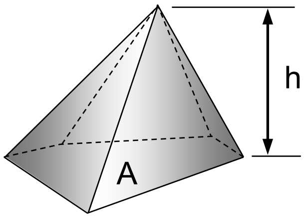
พื้นที่ผิวข้าง (lateral area) = πrL



4. ปีระมิดหรือกรวยทรงใดๆ

ปริมาตร = $\frac{1}{3}Ah$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ฐานกรวย



ค. พีชคณิต (Algebra)

1. สมการกำลังสอง (Quadratic equation)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ผลเฉลยหรือรากของสมการ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. ลอการิทึม

$$b^x = y,\ x = \log_b y$$

ล็อกฐานธรรมชาติ (Natural logarithms) $b = e = 2.718282$

$$e^x = y,\ x = \log_e y = \ln y$$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ $\qquad$ $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$

$\log(1/n) = \log(1) - \log(n) = -\log(n)$ $\qquad$ $\log(1) = 0$

$\log(a^n) = n\log(a)$ $\qquad$ $\log_{10} x = 0.4343\ln(x)$

3. ดีเทอมิแนนต์ (Determinants)

ดีเทอมิแนนต์อันดับสอง (2nd order determinant)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

ดีเทอมิแนนต์อันดับสาม (3rd order determinant)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_2b_1c_3 + a_1b_3c_2)$$

4. สมการกำลังสาม (Cubic equation)

$$x^3 = Ax + B$$

กำหนดให้ $p = A/3,\ q = B/2$

กรณีที่ 1: $q^2 - p^3 < 0$ จะได้รากจริงของสมการ 3 ค่า คือ

$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3)$$

$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 120^\circ)$$

$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos(u/3 + 240^\circ)$$

เมื่อ $u = q/(p\sqrt{p})$ $0 \le u < 180^\circ$

กรณีที่ 2: $q^2 - p^3 > 0$ จะได้รากจริง 1 ค่า และรากจินภาพ 2 ค่า คือ

$$x_1 = (q + \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3} + (q - \sqrt{q^2 - p^3})^{1/3}$$

กรณีที่ 3: $q^2 - p^3 = 0$ จะได้รากจริง 3 ค่า โดยมีค่าราก 2 ที่เท่ากัน คือ

$$x_1 = 2q^{1/3}$$

$$x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

สำหรับสมการกำลังสามรูปแบบทั่วไป

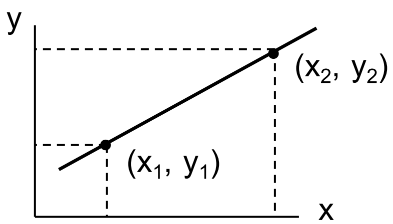
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

แทนค่า $x = x_0 - a/3$ จะได้สมการในรูป $x_0^3 = Ax_0 + B$ จากนั้นแก้หาค่า x_0 โดยอาศัยหลักการด้านบน เมื่อได้ว่า x_0 จึงแทนกลับหาค่า x ต่อไป

ง. เรขาคณิตวิเคราะห์ (Analytic Geometry)

1. สมการเส้นตรง

เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) มีสมการเป็นดังนี้



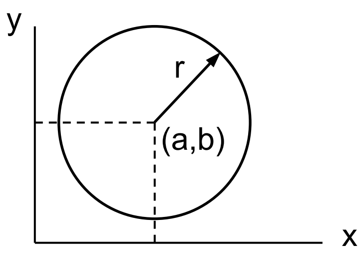
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

หรือ $$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

เมื่อความชัน $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

2. สมการวงกลม

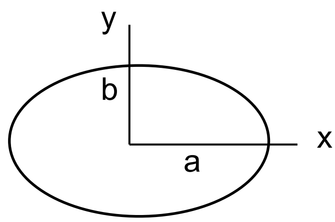
วงกลมรัศมี r มีจุดศูนย์กลางที่พิกัด (a, b) มีสมการเป็นดังนี้



$$(x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

3. สมการวงรี

วงรีที่มีความยาวแกนเอกเท่ากับ 2a และความยาวแกนโทเท่ากับ 2b มีสมการเป็นดังนี้



$$(x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

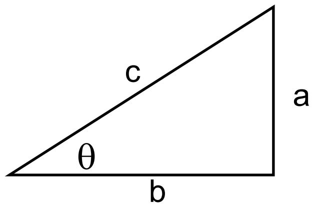
จ. ตรีโกณมิติ (Trigonometry)

1. นิยาม

$\sin\theta = a/c$, $\csc\theta = 1/\sin\theta = c/a$

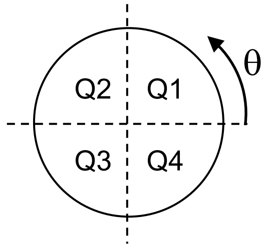
$\cos\theta = b/c$, $\sec\theta = 1/\cos\theta = c/b$

$\tan\theta = a/b$, $\cot\theta = 1/\tan\theta = b/a$



2. เครื่องหมายสำหรับแต่ละควอดแรนต์

	Q1	Q2	Q3	Q4
$\sin\theta, \csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta, \sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta, \cot\theta$	+	−	+	−



3. กฎไซน์และโคไซน์ (sine/ cosine law)

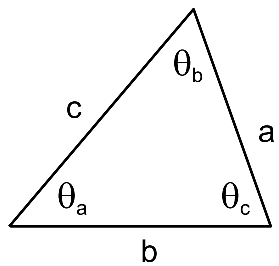
สำหรับสามเหลี่ยมที่มุมทุกมุมมีขนาด $\leq 90^{o}$ (สามเหลี่ยมมุมแหลม) จะได้

ความสัมพันธ์ตามกฎไซน์ ดังนี้

$$\frac{a}{\sin\theta_a} = \frac{b}{\sin\theta_b} = \frac{c}{\sin\theta_c}$$

ความสัมพันธ์ตามกฎโคไซน์ ดังนี้

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_c$$



4. ความสัมพันธ์ทางตรีโกณมิติ

ลำดับที่	ความสัมพันธ์	ผลความสัมพันธ์
1	$\sin^2 A + \cos^2 A$	1
2	$1 + \tan^2 A$	$\sec^2 A$
3	$1 + \cot^2 A$	$\csc^2 A$
4	$\tan 2A$	$\frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$
5	$\sin 2A$	$2\sin A\cos A,\ \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$
6	$\cos 2A$	$\cos^2 A - \sin^2 A,\ 1 - 2\sin^2 A,\ \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$
7	$\cos^2 A$	$\frac{1 + \cos 2A}{2}$
8	$\sin^2 A$	$\frac{1 - \cos 2A}{2}$
9	$\sin(A/2)$	$\sqrt{\frac{(1 - \cos A)}{2}}$
10	$\sin(-A)$	$-\sin A$
11	$\cos(-A)$	$\cos A$
12	$\sin(\pi - A)$	$\sin A$
13	$\cos(\pi - A)$	$-\cos A$
14	$2\sin A\cos B$	$\sin(A + B) + \sin(A - B)$
15	$2\sin A\sin B$	$\cos(A - B) - \cos(A + B)$
16	$2\cos A\cos B$	$\cos(A + B) + \cos(A - B)$
17	$\sin(A \pm B)$	$\sin A\cos B \pm \cos A\sin B$
18	$\cos(A \pm B)$	$\cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

ฉ. การดำเนินการเวคเตอร์ (Vector Operations)

1. เวคเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit vector)

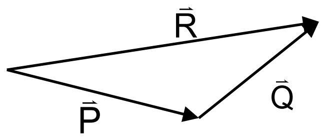
$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} = \frac{(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

เมื่อ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน (x, y, z) ส่วน $\vec{n}$ เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{V}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{V}$

2. การบวกเวคเตอร์ (Addition)



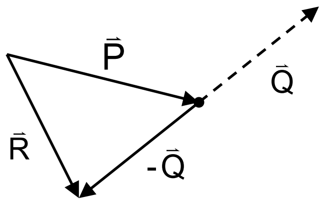
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = (P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}) + (Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k})$$

กฎการสลับที่: $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$

กฎการจัดกลุ่ม: $\vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S}) = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S}$

3. การลบเวคเตอร์ (Subtraction)



การลบเวคเตอร์ใช้หลักการบวกด้วยเวคเตอร์ที่มีทิศตรงข้าม

$$\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$$

4. โคไซน์แสดงทิศทาง (Direction cosines)

$$V_x = \left|\vec{V}\right|\cos\theta_x, \qquad V_y = \left|\vec{V}\right|\cos\theta_y, \qquad V_z = \left|\vec{V}\right|\cos\theta_z$$

$$\cos\theta_x = \frac{V_x}{\left|\vec{V}\right|} = l, \qquad \cos\theta_y = \frac{V_y}{\left|\vec{V}\right|} = m, \qquad \cos\theta_z = \frac{V_z}{\left|\vec{V}\right|} = n$$

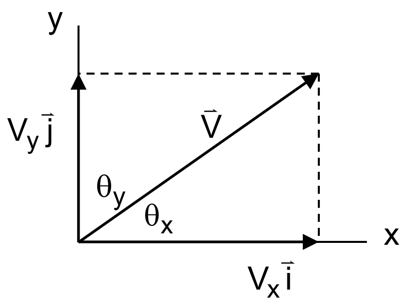
เรียก l, m, n ว่าโคไซน์แสดงทิศทางเทียบกับแกน x, y, และ z ตามลำดับ จึงได้ $V_x = \left|\vec{V}\right| l$, $V_y = \left|\vec{V}\right| m$, $V_z = \left|\vec{V}\right| n$ แต่เนื่องจาก $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}$ ดังนั้น

$$\vec{V} = \left|\vec{V}\right|(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$$

ฉะนั้น $l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} = \dfrac{\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|}$ จึงเป็นเวคเตอร์

หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\vec{V}$ ดังนั้นจึงได้

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

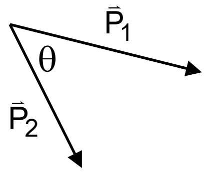


5. Scalar product (Dot product)

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = \left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|\cos\theta$$

$$\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = (P_{1x}\vec{i} + P_{1y}\vec{j} + P_{1z}\vec{k}) \cdot (P_{2x}\vec{i} + P_{2y}\vec{j} + P_{2z}\vec{k})$$

$$= P_{1x}P_{2x} + P_{1y}P_{2y} + P_{1z}P_{2z}$$



จากนิยามของโคไซน์แสดงทิศทางจะได้

$$\frac{\vec{P}_1}{\left|\vec{P}_1\right|} = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k} \quad \text{และ} \quad \frac{\vec{P}_2}{\left|\vec{P}_2\right|} = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$$

ดังนั้น สามารถหามุม θ ระหว่างเวคเตอร์ $\vec{P}_1$ และ $\vec{P}_2$ ได้จาก

$$\cos\theta = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right|\left|\vec{P}_2\right|} = \frac{\vec{P}_1}{\left|\vec{P}_1\right|} \cdot \frac{\vec{P}_2}{\left|\vec{P}_2\right|}$$

$$= (l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}) \cdot (l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

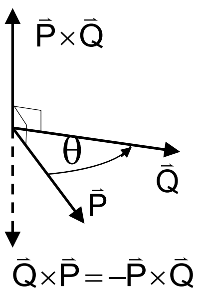
กฏการสลับที่: $\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 = \vec{P}_2 \cdot \vec{P}_1$

กฏการกระจาย: $\vec{P}_1 \cdot (\vec{P}_2 + \vec{P}_3) = \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \cdot \vec{P}_3$

6. Vector product (Cross product)

$$\left|\vec{P} \times \vec{Q}\right| = \left|\vec{P}\right|\left|\vec{Q}\right|\sin\theta$$

ทิศทางของเวคเตอร์ลัพธ์จะตั้งฉากกับเวคเตอร์ที่ cross กัน ตามกฏมือขวา ดังนั้นสำหรับเวคเตอร์หนึ่งหน่วยแนวแกนจึงได้



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

ดำเนินการโดยใช้หลักการกระจายได้เป็น

$$\vec{P}\times\vec{Q} = (P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k})\times(Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k})$$

$$= (P_yQ_z - P_zQ_y)\vec{i} + (P_zQ_x - P_xQ_z)\vec{j} + (P_xQ_y - P_yQ_x)\vec{k}$$

ดำเนินการโดยใช้หลักการดีเทอร์มิแนนต์

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

7. Triple scalar/vector product

Triple scalar product นิยามดังต่อไปนี้

$$\vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{R}) = (\vec{P}\times\vec{Q})\cdot\vec{R}$$

ซึ่งเขียนในรูปการดำเนินการแบบดีเทอร์มิแนนต์ได้เป็น

$$\vec{P}\cdot(\vec{Q}\times\vec{R}) = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

Triple vector product (double vector cross) นิยามดังต่อไปนี้

$$(\vec{P}\times\vec{Q})\times\vec{R} = (\vec{R}\cdot\vec{P})\vec{Q} - (\vec{R}\cdot\vec{Q})\vec{P}$$

$$\vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R}) = (\vec{P}\cdot\vec{R})\vec{Q} - (\vec{P}\cdot\vec{Q})\vec{R}$$

โดย $\vec{R}\cdot\vec{P}$ ให้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ k ดังนั้น $(\vec{R}\cdot\vec{P})\vec{Q} = k\vec{Q}$

8. การดำเนินการอนุพันธ์ของเวคเตอร์

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec{i} + \frac{dP_y}{dt}\vec{j} + \frac{dP_z}{dt}\vec{k}$$

$$\frac{d(\vec{P}\cdot\vec{Q})}{dt} = \vec{P}\cdot\frac{d\vec{Q}}{dt} + \vec{Q}\cdot\frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{dt} = \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt}\times\vec{Q}$$

9. การดำเนินการปริพันธ์ของเวคเตอร์

$$\int\vec{V}dt = \int(V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k})dt = \vec{i}\int V_x dt + \vec{j}\int V_y dt + \vec{k}\int V_z dt$$

ช. อนุกรม (Series)

อนุกรมของฟังก์ชันที่สำคัญ

$$(1\pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \qquad [x^2 < 1]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad [x^2 < \infty]$$

การกระจายอนุกรมกำลัง (Power series expansion)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

การกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series expansion)

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0) + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

เมื่อ x_0 เป็นจุดตรึง และ x เป็นจุดที่ขยายออกไปรอบ x_0 ดังนั้น $h = x - x_0$ จึงเป็นระยะห่างจากจุดตรึงถึงจุดที่ขยายออกไป

ซ. อนุพันธ์ (Derivatives)

ลำดับที่	อนุพันธ์	ผลอนุพันธ์
1	$\frac{dc}{dx}$	0
2	$\frac{dx^n}{dx}$	nx^{n-1}
3	$\frac{d}{dx}(u+v)$	$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$
4	$\frac{d}{dx}(uv)$	$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$
5	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right), \frac{d}{dx}(uv^{-1})$	$\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
6	$\frac{d}{dx}u^n$	$nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
7	$\frac{d}{dx}\ln(ax+k)$	$\frac{a}{ax+k}$
8	$\frac{d}{dx}e^{ax}$	ae^{ax}
9	$\frac{d}{dx}a^x$	$a^x \ln a$
10	$\frac{d}{dx}\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$
11	$\frac{d}{dx}\sin x$	$\cos x$
12	$\frac{d}{dx}\cos x$	$-\sin x$
13	$\frac{d}{dx}\tan x$	$\sec^2 x$
14	$\frac{d}{dx}\cot x$	$-\csc^2 x$
15	$\frac{d}{dx}\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$\frac{d}{dx}\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17	$\frac{d}{dx}\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
18	$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

19	$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}x$	$\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
20	$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
21	$\frac{d}{dx}\sinh x$	$\cosh x$
22	$\frac{d}{dx}\cosh x$	$\sinh x$
23	$\frac{d}{dx}\tanh x$	$\operatorname{sech}^2 x$
24	$\sin dx$	$\approx \tan dx, \approx dx$ เมื่อ dx เป็นมุมค่าน้อยๆ
25	$\cos dx$	≈ 1 เมื่อ dx เป็นมุมค่าน้อยๆ

ฌ. ปริพันธ์ (Integrals)

ลำดับที่	ปริพันธ์	ผลปริพันธ์
1	$\int k\,dx$	$kx + C$
2	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \ n \neq -1$
3	$\int \frac{1}{ax+k} dx$	$\frac{1}{a}\ln(ax+k)+C$
4	$\int e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a} + C$
5	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
6	$\int xe^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$
7	$\int \ln x\,dx$	$x\ln x - x + C$
8	$\int x^n \ln x\,dx$	$x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C \qquad ; n \neq -1$
9	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$
10	$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$
11	$\int \tan x\,dx$	$\ln(\sec x)+C$
12	$\int \csc x\,dx$	$\ln(\csc x - \cot x)+C$
13	$\int \sec x\,dx$	$\ln(\sec x + \tan x)+C \quad ; \ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$
14	$\int \cot x\,dx$	$\ln(\sin x)+C$
15	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$
16	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$
17	$\int \csc^2 x\,dx$	$-\cot x + C$
18	$\int \sec^2 x\,dx$	$\tan x + C$
19	$\int \sin^3 x\,dx$	$-\frac{\cos x}{3}(2+\sin^2 x)+C$

20	$\int \cos^3 x dx$	$\frac{\sin x}{3}(2+\cos^2 x)+C$
21	$\int \sin x \cos x dx$	$\frac{\sin^2 x}{2}+C$
22	$\int \sec x \tan x dx$	$\sec x + C$
23	$\int \csc x \cot x dx$	$-\csc x + C$
24	$\int x \sin x dx$	$\sin x - x\cos x + C$
25	$\int x \cos x dx$	$\cos x + x \sin x + C$
26	$\int x^2 \sin x dx$	$2x\sin x-(x^2-2)\cos x+C$
27	$\int x^2 \cos x dx$	$2x\cos x+(x^2-2)\sin x+C$
28	$\int e^{ax} \sin bx dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$
29	$\int e^{ax} \cos bx dx$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$
30	$\int e^{ax} \sin^2 x dx$	$\frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\sin^2 x-\sin 2x+\frac{2}{a}\right)+C$
31	$\int e^{ax} \cos^2 x dx$	$\frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(a\cos^2 x+\sin 2x+\frac{2}{a}\right)+C$
32	$\int e^{ax} \sin x \cos x dx$	$\frac{e^{ax}}{4+a^2}\left(\frac{a}{2}\sin 2x-\cos 2x\right)+C$
33	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx$	$\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})+C$
34	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-k^2x^2}}dx$	$\frac{1}{k}\arcsin\left(\frac{kx}{a}\right)+C$
35	$\int \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}dx$	$\operatorname{arcsec} x + C$
30	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$
31	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$	$\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+C$
36	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx$	$\sqrt{x^2\pm a^2}$
37	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}dx$	$\pm\sqrt{a^2\pm x^2}$

38	$\int \arcsin x\,dx$	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$
39	$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$
40	$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$
41	$\int \arccos x\,dx$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$
42	$\int \arctan x\,dx$	$x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
43	$\int \mathrm{arccot}\, x\,dx$	$x\,\mathrm{arccot}\, x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
44	$\int \mathrm{arcsec}\, x\,dx$	$x\,\mathrm{arcsec}\, x-\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$
45	$\int \mathrm{arccsc}\, x\,dx$	$x\,\mathrm{arccsc}\, x+\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C$
46	$\int \sinh x\,dx$	$\cosh x+C$
47	$\int \cosh x\,dx$	$\sinh x+C$
48	$\int \tanh x\,dx$	$\ln(\cosh x)+C$

ญ. การแปลงลาปลาซ

ลำดับที่	F(s)	f(t) = L^{-1}\{F(s)\}
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{(n-1)!}{s^n}$	t^{n-1} ; $n=1, 2, 3, \ldots$
4	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, s^{-3/2}$	$t^{1/2}$
5	$\sqrt{\pi}\, s^{-1/2}$	$t^{-1/2}$
6	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n} s^{-(n+1/2)}$	$t^{n-1/2}$; $n=1, 2, 3, \ldots$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
9	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
10	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
11	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
12	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin(at)$
13	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos(at)$
14	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
15	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\sin(at)$
16	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos(at)$
17	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\sin(at)-at\cos(at)$
18	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a}e^{-t/a}$

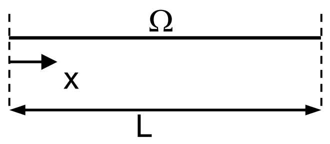
19	$\dfrac{1}{s(s-a)}$	$\dfrac{1}{a}(e^{at}-1)$
20	$\dfrac{1}{s(1+as)}$	$1-e^{-t/a}$
21	$\dfrac{1}{(1+as)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}te^{-t/a}$
22	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
23	$\dfrac{1}{(1+as)(1+bs)}$	$\dfrac{e^{-t/a}-e^{-t/b}}{a-b}$
24	$\dfrac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at)e^{at}$
25	$\dfrac{s}{(1+as)^2}$	$\dfrac{1}{a^3}(a-t)e^{-t/a}$
26	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$; เมื่อ $a \neq b$
27	$\dfrac{s}{(1+as)(1+bs)}$	$\dfrac{ae^{-t/b}-be^{-t/a}}{ab(a-b)}$
28	$\dfrac{1}{s^2(s-a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)$
29	$\dfrac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$	$\sin^2(at)$
30	$\dfrac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$	$\sinh^2(at)$
31	$\dfrac{a^3}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}-\sinh\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
32	$\dfrac{a^2s}{s^4+a^4}$	$\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sinh\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
33	$\dfrac{as^2}{s^4+a^4}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\sinh\dfrac{at}{\sqrt{2}}+\sin\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cosh\dfrac{at}{\sqrt{2}}\right)$
34	$\dfrac{s^3}{s^4+a^4}$	$\cos\dfrac{at}{\sqrt{2}}\cosh\dfrac{at}{\sqrt{2}}$
35	$\dfrac{a^3}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\sinh(at)-\sin(at))$
36	$\dfrac{a^2s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2}(\cosh(at)-\cos(at))$

37	$\frac{as^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\sinh(at)+\sin(at))$
38	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh(at)+\cos(at))$
39	$\frac{2a^2s}{s^4+4a^4}$	$\sin(at)\sinh(at)$
40	$\frac{a(s^2-2a^2)}{s^4+4a^4}$	$\cos(at)\sinh(at)$
41	$\frac{a(s^2+2a^2)}{s^4+4a^4}$	$\sin(at)\cosh(at)$
42	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos(at)\cosh(at)$
43	$\frac{as^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(\sin(at)+at\cos(at))$
44	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos(at)-\frac{at}{2}\sin(at)$
45	$\frac{a^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2}(at\cosh(at)-\sinh(at))$
46	$\frac{as}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2}\sinh(at)$
47	$\frac{as^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2}(\sinh(at)+at\cosh(at))$
48	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh(at)+\frac{at}{2}\sinh(at)$

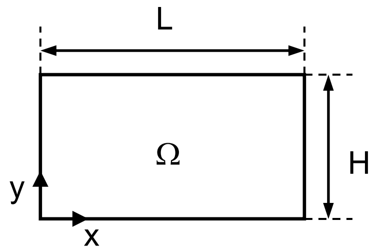
ฎ. การแปลงหน่วย

ฏ. เงื่อนไขขอบ

ถ้าในสมการอนุพันธ์ที่ต้องการแก้มีตัวแปรที่ระบุพิกัด หรือตำแหน่งในอาณาบริเวณ ดังตัวอย่างรูป (a) เป็นปัญหา 1 มิติ และ (b) เป็นปัญหา 2 มิติ โดยสัญลักษณ์ Ω หมายถึงโดเมน



(a) โดเมนปัญหา 1 มิติ



(b) โดเมนปัญหา 2 มิติ

จากรูป ปัญหา 1 มิติจึงมีขอบซ้าย (x=0) และขอบขวา (x=L) ส่วนปัญหา 2 มิติมีขอบซ้าย (x=0) ขอบขวา (x=L) ขอบล่าง (y=0) และขอบบน (y=H) ในการแก้ปัญหาดังกล่าวจำเป็นต้องกำหนด *ค่าขอบ* หรือ *เงื่อนไขขอบ* (boundary condition) ให้ด้วยจึงจะแก้หาผลเฉลยได้ การกำหนดค่าขอบทำได้ 3 แบบดังนี้

(1) *Dirichlet* คือการกำหนดเงื่อนไขขอบด้วยค่าคงที่ เช่น

T(0) = 100 → หมายถึง ที่ x=0 (ขอบซ้าย) ค่า T=100

T(x,H) = 20 → หมายถึง ที่ y=H (ขอบบน) ค่า T=20

(2) *Neumann* คือการกำหนดเงื่อนไขขอบด้วยค่าอนุพันธ์ของตัวแปร เช่น

$\frac{d}{dx}T(L)=0$ → หมายถึง ที่ x=L (ขอบขวา) ค่า $\frac{dT}{dx}=0$

$\frac{d}{dy}T(x,0)=1$ → หมายถึง ที่ y=0 (ขอบล่าง) ค่า $\frac{dT}{dy}=1$

(3) *Robin* หรือ *Mixed* คือคือการกำหนดเงื่อนไขขอบแบบผสม เช่น

$T(0)+\frac{dT}{dx}(0)=5$ → หมายถึง ที่ x=0 (ขอบขวา) ค่า $T+\frac{dT}{dx}=0$

$T(L,y)-\frac{dT}{dy}(L,y)=2$ → หมายถึง ที่ x=L (ขอบขวา) ค่า $T-\frac{dT}{dy}=2$