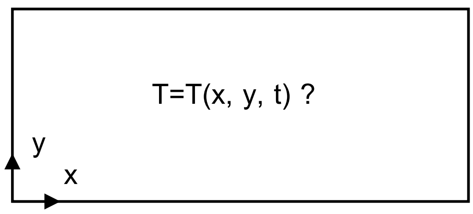
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

4.1 บทนำ

พื้นฐานทางวิศวกรรมปัจจุบันพัฒนาขึ้นบนโลกของนิวตัน ประกอบด้วยมิติเวลา (t) 1 และมิติพิกัด (x, y, z) อีก 3 รวมเป็น 4 มิติ ทั้งหมดเป็นอิสระต่อกัน (หมายความว่าเวลาไม่เกี่ยวข้องกับระยะทาง และระยะทางแต่ละแกนก็ไม่เกี่ยวข้องกัน แม้ภายหลังไอสไตน์จะพิสูจน์ได้ว่าเวลากับระยะทางเกี่ยวข้องและคือสิ่งเดียวกันก็ตาม) จึงเรียกว่าตัวแปรของทั้ง 4 มิติว่า *ตัวแปรอิสระ* หรือ *ตัวแปรต้น* ในการกำหนดว่าปัญหาที่วิเคราะห์มีกี่มิตินั้น ให้นักศึกษาพิจารณาจากตัวแปรที่เราสนใจว่ามีการเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรต้นกี่ตัว ยกตัวอย่างเช่น การกระจายอุณหภูมิ T บนแผ่นโลหะ 2 มิติ ดังแสดงในรูป



ดังนั้น ตัวแปรที่เราสนใจคือ T โดยมีตัวแปรต้น 3 ตัวที่เกี่ยวข้อง คือ x, y และ t หากพิจารณาเห็นว่าตัวแปร T มีการเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรต้นครบทั้ง 3 ตัว กล่าวคือ T เปลี่ยนค่าไปตามพิกัด (x, y) พร้อมกันนั้นก็เปลี่ยนค่าไปตามเวลา t ด้วย ลักษณะเช่นนี้เรียกว่าเป็นปัญหา 3 มิติ คือ T=T(x, y, t)

อย่างไรก็ตาม หากนิยามปัญหา 3 มิติเช่นดังกล่าวนี้ก็อาจเข้าใจได้หลายแบบ เช่น T=T(x, y, t) หรือ T=T(x, y, z) เป็นต้น ซึ่งทั้งสองแบบนี้พฤติกรรมของปัญหาแตกต่างกัน ดังนั้น เพื่อไม่ให้เกิดความสับสนจึงนิยมแยกมิติเวลากับมิติพิกัดออกจากกัน โดยบอกมิติปัญหาด้วยมิติพิกัดที่เกี่ยวข้อง แล้วตามด้วยการบอกความเกี่ยวข้องกับมิติเวลา หากปัญหามีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเรียกตามท้ายด้วยคำว่า “*ที่ขึ้นกับเวลา*” (time dependent) หรือ “*แบบไม่คงตัว*”

(unsteady) เช่น T=T(x, y, t) เรียกว่า ปัญหา 2 มิติที่ขึ้นกับเวลา หรือปัญหา 2 มิติแบบไม่คงตัว เป็นต้น แต่ถ้าหากปัญหานั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเรียกตามท้ายด้วยคำว่า “*ที่ไม่ขึ้นกับเวลา*” (time independent) หรือ “*แบบคงตัว*” (steady) เช่น T=T(x, y) เรียกว่า ปัญหา 2 มิติที่ไม่ขึ้นกับเวลา หรือปัญหา 2 มิติแบบคงตัว เป็นต้น

อย่างไรก็ตาม มิติรูปทรงกับมิติปัญหาเป็นคนละอย่างกัน จากตัวอย่างที่ยกมานั้น มิติรูปทรงเป็น 2 มิติ ส่วนมิติปัญหาจะเป็นเท่าไหร่นั้นก็ขึ้นอยู่กับว่าตัวแปรที่สนใจเปลี่ยนแปลงหรือเกี่ยวข้องกับตัวแปรพิกัดกี่ตัว หาก T มีการเปลี่ยนแปลงตามพิกัด x อย่างเดียวโดยไม่แปรตามพิกัด y (หมายความว่าที่ความสูง y ใดๆ จะวัดค่า T ได้เท่ากันที่พิกัด x หนึ่งๆ) กรณีเช่นนี้จึงเขียนได้เป็น T=T(x, t) เป็นปัญหา 1 มิติแบบไม่คงตัว และหากปัญหานี้ไม่ขึ้นกับเวลาก็จะเขียนได้เป็น T=T(x) เป็นปัญหา 1 มิติแบบคงตัว ดังนั้นจะเห็นว่าแม้จะเป็นรูปทรง 2 มิติ แต่มิติปัญหาอาจเป็น 2 หรือ 1 มิติก็ได้

จำนวนตัวแปรต้นหรือมิติของปัญหาจึงมีความสำคัญที่นักศึกษาต้องเข้าใจและวิเคราะห์ให้ได้ในเบื้องต้น เพราะเกี่ยวข้องกับรูปแบบสมการควบคุมที่จะแก้ หากปัญหาใดเกี่ยวข้องหรือมีตัวแปรต้นมากกว่า 1 ตัว สมการควบคุมของปัญหานั้นจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เช่น ปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นโลหะ 3 มิติ มีสมการควบคุมในรูปแบบดังนี้

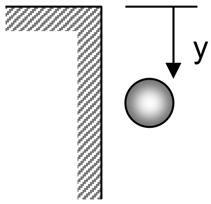
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0$$

การแก้ปัญหาที่มีสมการควบคุมในรูปอนุพันธ์ย่อยมีความยุ่งยาก (นักศึกษาจะได้เรียนในบทถัดไป) หรือบางครั้งอาจแก้ไม่ได้ด้วยวิธีทางคณิตศาสตร์วิเคราะห์ จำเป็นต้องอาศัยวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยแก้ แต่สำหรับปัญหาที่มีตัวแปรต้นเพียงตัวเดียว สมการควบคุมของปัญหานั้นจะอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เช่น ปัญหาการนำความร้อนบนเส้นลวด 1 มิติ สมการควบคุม 4.1 จึงลดรูปเป็นดังนี้

$$\frac{d^2 T}{\partial x^2}=0$$

ดังนั้น หากมองข้ามรูปแบบและความยุ่งยากทางคณิตศาสตร์แล้ว ปัญหาเชิงอนุพันธ์สามัญก็คือปัญหา 1 มิตินั่นเอง ปัญหาดังกล่าวนี้ปรากฏอยู่ในงานทางวิศวกรรมหลายรูปแบบ ตัวอย่างดังต่อไปนี้

ปัญหาการตกอย่างอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วง

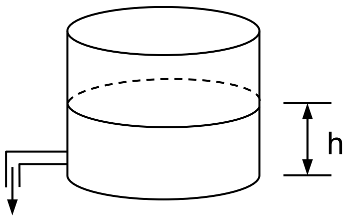


สมการควบคุมสังเคราะห์จากกฏการเคลื่อนข้อที่ 2 ของนิวตัน $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2y}{dt^2} = my''$

การตกอย่างอิสระจะได้ $\sum \vec{F} = mg$ ดังนั้น

$$my'' = mg = \text{const} \qquad (4.1)$$

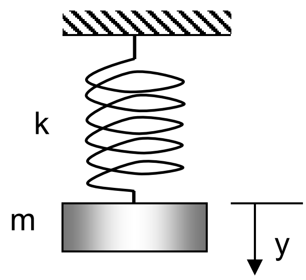
ปัญหาการไหลออกของน้ำจากถัง



สมการควบคุมอยู่ในรูป

$$h' = -k\sqrt{h} \qquad (4.2)$$

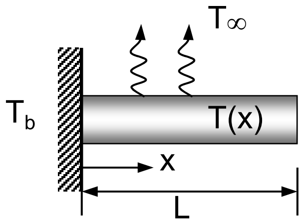
ปัญหาการสั่น



สังเคราะห์โดยใช้กฏข้อที่ 2 ของนิวตัน ได้สมการควบคุมอยู่ในรูป

$$my'' + ky = 0 \qquad (4.3)$$

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนของครีบ



สังเคราะห์โดยใช้หลักสมดุลพลังงาน ได้สมการควบคุมอยู่ในรูป

$$T'' - m^2 (T - T_\infty) = 0 \qquad (4.4)$$

เมื่อ m เป็นค่าคงที่

4.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> การสลายตัวของมวลกัมมันตรังสีเขียนแทนด้วยสมการ

$$\frac{dm}{dt} = km$$

เมื่อ m เป็นมวลคงเหลือ (กรัม), t เป็นเวลา (ปี) และ $k=-4.415\text{x}10^{-4}$ เป็นค่าคงที่ของการสลายตัว กำหนดมวลเริ่มต้นเท่ากับ 2 กรัม จงหามวลคงเหลือจากการสลายตัวเมื่อเวลาผ่านไป

<u>วิธีทำ</u> จากสมการควบคุมการสลายตัว จัดรูปได้เป็น

$$\int \frac{1}{m} dm = k \int dt$$

$$\ln(m) = kt + C$$

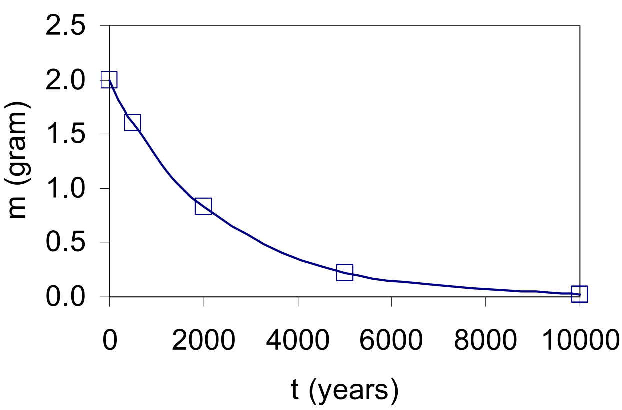
$$m = e^{kt+C} = e^{kt} e^{C} = Ae^{kt} \qquad (a)$$

เมื่อ $A = e^{C}$ เป็นค่าคงที่ จากค่าเริ่มต้น t = 0; m = 2 กรัม แทนในสมการ (a) ได้เป็นดังนี้

$$2 = Ae^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad A = 2$$

ดังนั้นจากสมการ (a) จึงดีรูปแบบการสลายตัวเป็น $m = 2e^{-4.415\times10^{-4}t}$ ซึ่งนำไปแสดงเป็นกราฟได้ดังนี้

t (ปี)	m (กรัม)
0	2.000
500	1.604
2,000	0.827
5,000	0.220
10,000	0.0242



ตัวอย่าง 4.2 จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1,1) และมีความชันเป็น –y/x บนระนาบ x-y

วิธีทำ ความชันให้นิยามในรูป dy/dx ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

จัดรูปได้เป็น

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(y) = -\ln(x) + C$$

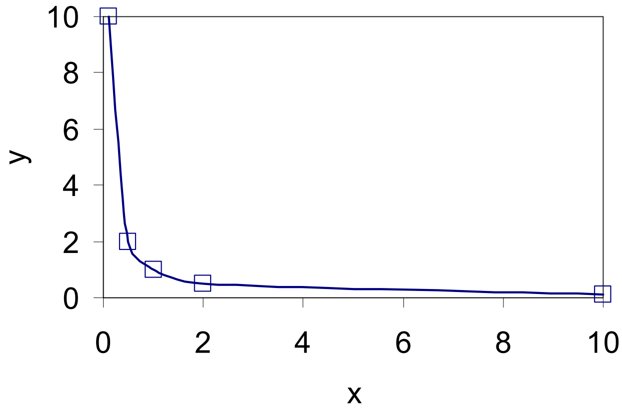
กำหนดให้ $C = \ln(A)$ เมื่อ C และ A เป็นค่าคงที่ จึงได้ว่า

$$\ln(y) = -\ln(x) + \ln(A) = \ln(A/x)$$

$$y = \frac{A}{x} \qquad \text{(a)}$$

เส้นโค้งลากผ่านจุด (1,1) นั่นคือ x=1, y=1 แทนในสมการ (a) จะได้ว่า A=1 ดังนั้นจึงได้สมการเส้นโค้งเป็น $y = 1/x$ หรือ $xy = 1$ นำไปแสดงกราฟได้เป็น

x	y
0.1	10.0
0.5	2.0
1.0	1.0
2.0	0.5
10.0	0.1



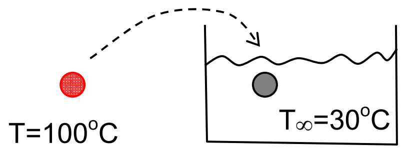
ตัวอย่าง 4.3 นำบอลโลหะขนาดเล็กอุณหภูมิเริ่มต้น T=100°C จุ่มลงในอ่างน้ำขนาดใหญ่อุณหภูมิ T_∞=30°C การลดลงของอุณหภูมิของลูกบอลเทียบต่อเวลาเป็นไปตามกฎ Newton Cooling ซึ่งสมการควบคุมอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_\infty)$$

โดย T เป็นอุณหภูมิ (°C) และ t เป็นเวลา (วินาที)

หากบอลโลหะมีอุณหภูมิลดลงเหลือ 70°C เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที จงหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าใดลูกบอลโลหะดังกล่าวจึงจะมีอุณหภูมิเหลือ 31°C

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ตีความได้ดังนี้



t=0 s → T=100°C

t=3 s → T=70°C

t=? s → T=31°C

จากสมการควบคุมทำการจัดรูปเพื่อแก้สมการได้เป็นดังนี้

$$\int \frac{1}{T-30}dT = k\int dt$$

$$\ln(T-30) = kt + C$$

$$T-30 = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} = Ae^{kt} \qquad \text{(a)}$$

เมื่อ $A = e^{C}$ เป็นค่าคงที่ จากค่าเริ่มต้น t=0; T=100°C แทนลงในสมการ (a) ได้เป็นดังนี้

$$70 = Ae^{k(0)} \qquad \Rightarrow \qquad A = 70$$

ดังนั้นจากสมการ (a) จึงดีรูปแบบการสลายตัวเป็น

$$T-30 = 70e^{kt} \qquad \text{(b)}$$

แทนเงื่อนไข t=3; T=70°C แทนในสมการ (b) ได้เป็นดังนี้

$$40 = 70e^{3k} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1}{3}\ln(40/70) = -0.1865$$

แทน k ลงในสมการ (b) จะได้สมการสำหรับอุณหภูมิของบอลโลหะเป็นดังนี้

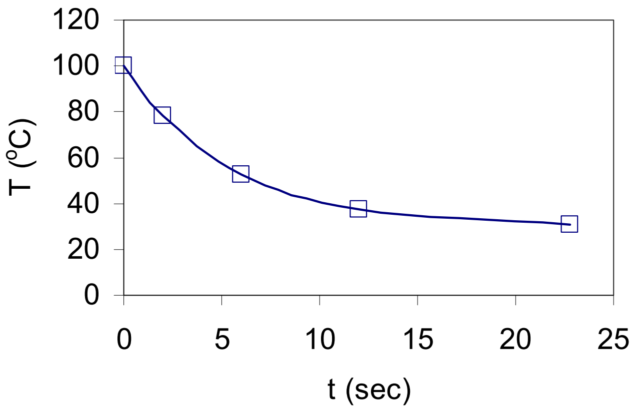
$$T-30 = 70e^{-0.1865t} \qquad \text{(c)}$$

หาเวลาที่บอลโลหะใช้ในการเย็นตัวลงจนถึง T=31°C โดยแก้สมการ (c) ดังนี้

$$1 = 70e^{-0.1865t} \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{1}{0.1865}\ln(1/70) = 22.8\,s$$

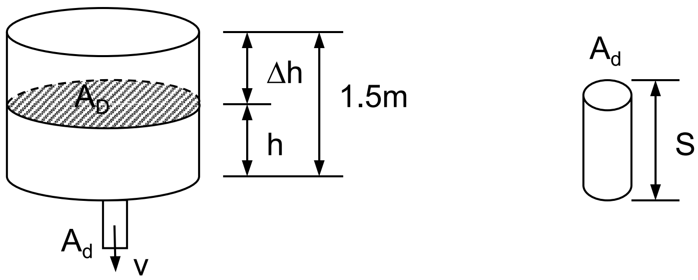
นำสมการไปแสดงเป็นกราฟได้เป็นดังนี้

t(s)	T(°C)
0	100
2	78
6	53
11	39
22.8	31



<u>ตัวอย่าง 4.4</u> น้ำบรรจุในถังทรงกระบอกขนาด $\varnothing_D$=1 m หลังจากนั้นปล่อยน้ำออกจากช่องด้านล่างซึ่งมีขนาด $\varnothing_d$=1 cm กำหนดให้ระดับน้ำเริ่มต้น h(0)=150 cm จงหาการเปลี่ยนแปลงระดับน้ำ h เมื่อเวลาเปลี่ยนไป และระยะเวลาที่ใช้เพื่อปล่อยน้ำให้ไหลออกจนหมดถัง

<u>วิธีทำ</u>



เมื่อ A_D และ A_d เป็นพื้นที่หน้าตัดของถังใหญ่และของช่องทางออก ตามลำดับ

สมการควบคุมการไหลนี้วิเคราะห์ได้จากการเปลี่ยนรูป “พลังงานศักย์” ไปเป็น “พลังงานจนน์” ดังนี้

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \quad \text{ดังนั้นจึงได้} \quad v = C\sqrt{2gh}$$

เมื่อ C เป็นสัมประสิทธิ์การสูญเสียของการไหล (ผลจากความฝืดและอื่นๆ ที่ทำให้ความเร็วของการไหลลดลง โดยทั่วไป $C \le 1$ ถ้า C=1 หมายถึงไม่มีการสูญเสียใดๆ)

ปริมาตรของน้ำที่ไหลออกจากท่อเล็กเมื่อเวลาผ่านไป Δt หาได้จาก

$$\Delta\forall_d = A_d S = A_d v\Delta t \qquad \text{(a)}$$

ปริมาตรของน้ำในถังใหญ่ที่ลดลง (ไหลออก) หาได้จาก

$$\Delta\forall_D = -A_D\Delta h \qquad \text{(b)}$$

เครื่องหมายลบแสดงปริมาตรที่ลดลงของน้ำในถัง ซึ่งต้องมีค่าเท่ากับปริมาตรของน้ำที่ไหลออกผ่านช่องทางออก หรือ $\Delta\forall_d = \Delta\forall_D$ จึงได้

$$-A_D\Delta h = A_d v\Delta t \qquad \text{หรือ} \qquad -A_D dh = A_d v dt$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_d}{A_D}v = -\frac{A_d}{A_D}C\sqrt{2gh} = -\left(C\sqrt{2g}\frac{A_d}{A_D}\right)\sqrt{h} = -k\sqrt{h}$$

เมื่อ $k = C\sqrt{2g}\frac{A_d}{A_D}$ เป็นค่าคงที่ หากกำหนด C=0.79 จะได้

$$k = C\sqrt{2g}\frac{A_d}{A_D} = 0.79\sqrt{2\times 9.81}\frac{\pi(0.01)^2}{\pi(1)^2} = 3.5\times 10^{-4}$$

ดังนั้นจึงจัดรูปเพื่อแก้สมการได้เป็น

$$\int\frac{1}{\sqrt{h}}dh = -k\int dt$$

$$2\sqrt{h} = -kt + A$$

$$h = \frac{1}{4}(A-kt)^2 \qquad \text{(c)}$$

แทนค่าเงื่อนไข t=0; h=1.5 m ลงในสมการ (c) ได้เป็นดังนี้

$$1.5 = \frac{1}{4}(A-k(0))^2 \quad \Rightarrow \quad A = 2.45$$

ดังนั้นจึงได้สมการที่ใช้อธิบายระดับควมสูงของน้ำในถังเป็น

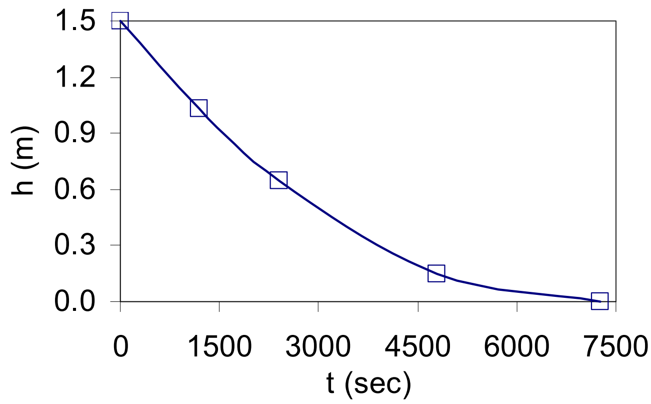
$$h = \frac{1}{4}(2.45-kt)^2 = \frac{1}{4}(2.45-3.5\times 10^{-4}t)^2 \qquad \text{(d)}$$

หาเวลาที่ใช้เพื่อปล่อยน้ำจนหมดถัง (h=0 m) โดยการแก้สมการ (d) ดังนี้

$$0 = \frac{1}{4}(2.45-3.5\times 10^{-4}t)^2 \quad \Rightarrow \quad t = 7257\,\text{s}\ (121\,\text{min})$$

นำสมการ (d) ไปแสดงกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความสูงน้ำ h (m) กับระยะเวลาที่ใช้ t(s) ตั้งแต่เวลาเริ่มต้นจนถึงเวลาที่น้ำไหลออกจนหมดถัง

t(s)	h(m)
0	1.50
1200	1.03
2400	0.65
4800	0.15
7257	0.00



4.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

สมการอนุพันธ์สามัญอันดับสองที่กล่าวถึงในที่นี้หมายถึงสมการแบบเชิงเส้นเท่านั้น รูปทั่วไปของสมการเขียนได้เป็นดังนี้

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (4.5)$$

ซึ่งเป็นสมการแบบเชิงเส้น (linear) และเอกพันธ์ (homogeneous) คำตอบของสมการอยู่ในรูปดังนี้

$$y = e^{\lambda x} \qquad (4.6)$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงที่ และ x เป็นตัวแปรต้นของสมการ สมการที่ (4.6) จึงได้ว่า

$y' = \lambda e^{\lambda x}$ และ $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

แทนค่าลงในสมการที่ (4.1) จะได้

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0 \qquad (4.7a)$$

หรือจัดรูปได้เป็น

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \qquad (4.7b)$$

จะเห็นว่าสมการที่ (4.7) เป็นการคูณกันของ 2 เทอมคือ ($a\lambda^2+b\lambda+c$) และ $e^{\lambda x}$ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์ บนเงื่อนไขดังกล่าวจึงเป็นไปได้ 2 แนวทางที่จะทำให้สมการเป็นจริง ได้แก่

1) โดยให้ $e^{\lambda x}=0$ หมายความว่าเราต้องกำหนดให้ค่า $\lambda x\to-\infty$ จึงจะทำให้ได้ $e^{\lambda x}\to 0$ ซึ่งแนวทางนี้ดูเหมือนไม่มีประโยชน์ในทางปฏิบัติ เพราะเราไม่ทราบว่า $\lambda x\to-\infty$ นั้นหมายถึงค่าเท่าใด ดังนั้นจึงจะไม่พิจารณา

2) โดยการกำหนดให้

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \tag{4.8}$$

ซึ่งจะเห็นว่าความสัมพันธ์เป็นสมการกำลังสองที่สามารถแก้หาผลเฉลยได้ โดยมีผลเฉลย 2 ค่า ที่เรียกว่าค่าราก ส่วนสมการที่ (4.8) จึงมักถูกเรียกว่า “สมการคุณลักษณะ” (characteristic equation) หรือ “สมการช่วย” (auxiliary equation) ผลเฉลยหรือค่ารากของสมการหาได้จากสูตรสำเร็จดังนี้

$$\lambda_1=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right) \tag{4.9a}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right) \tag{4.9b}$$

ดังนั้นสมการอนุพันธ์สามัญอันดับสองในรูปสมการที่ (4.5) ซึ่งมีรูปคำตอบทั่วไปเป็นไปตามสมการที่ (4.6) นั้น จึงมี 2 คำตอบตามจำนวนของค่าราก ดังนี้

$$y_1=e^{\lambda_1 x} \qquad \text{และ} \qquad y_2=e^{\lambda_2 x} \tag{4.10}$$

เนื่องจากทั้ง y_1 และ y_2 ต่างเป็นคำตอบของสมการ การจะบอกว่าคำตอบคือ $y=y_1$ หรือ $y=y_2$ เพียงอย่างเดียวอาจมองว่าไม่สมบูรณ์ (วิศวกรเราเป็นพวกรักพี่

เสียดายน้อง) ดังนั้นจึงนำคำตอบทั้งคู่มาผนวกเข้าด้วยกันบนหลักการ "การรวมแบบเชิงเส้น" (linear combination) (...เอาทั้งพี่และน้อง) ในรูปแบบดังนี้

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{4.11}$$

โดย C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ ซึ่งหาค่าได้จากเงื่อนไขของปัญหา การทำเช่นนี้มีประโยชน์ที่ว่าค่าคงที่ดังกล่าวจะเป็นตัวจัดการสัดส่วน (ถ่วงน้ำหนัก) ผลกระทบของคำตอบที่ได้จากทั้งสองส่วนอย่างอัตโนมัติ

อย่างไรก็ตามคำตอบตามสมการที่ (4.11) จะขึ้นอยู่กับค่า $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ในพจน์ของ λ (สมการที่ (4.9)) ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $(b^2 - 4ac) > 0$ จะได้ค่า $\lambda_1 \neq \lambda_2$ โดยที่ทั้ง λ_1 และ λ_2 ต่างก็เป็นจำนวนจริง (real roots) เรียกว่า "รากจริง" $\lambda_1 \neq \lambda_2$ คำตอบรูปทั่วไปของกรณีนี้เป็นดังนี้

$$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \tag{4.12a}$$

นอกจากนี้ หากพบว่าค่ารากอยู่ในรูป $\pm\lambda$ หรือ $\lambda_1 = -\lambda_2$ เช่น จากสมการที่ (4.8) หาก a=1, b=0, และ c=-9 จะได้สมการเป็น $\lambda^2 - 9 = 0$ และได้คำตอบเป็น $\pm\lambda = \pm\sqrt{9} = 3, -3$ หรือ $\lambda = 3\ (\lambda_1)\ -\lambda = -3\ (\lambda_2)$ เป็นต้น เราสามารถจัดสมการที่ (4.12a) ให้ในรูปฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก ดังนี้

$$y = C_1 \sinh\lambda x + C_2 \cosh\lambda x \tag{4.12b}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงที่ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขของปัญหา สมการที่ (4.12b) ประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ครีบระบายความร้อน ในการเรียนรายวิชาการถ่ายเทความร้อน

สามารถพิสูจน์ความสัมพันธ์ระหว่างสมการที่ (4.12a) และ (4.12b) ได้ดังนี้

จากนิยามของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

$$\sinh\lambda x = \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2} \qquad \text{และ} \qquad \cosh\lambda x = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

แทนลงในสมการที่ (4.12a) ได้เป็น

$$y = C_1\left(\frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2}\right) + C_2\left(\frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}\right)$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$y = \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)e^{\lambda x} + \left(-\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)e^{-\lambda x} = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$$

เมื่อ $A = \left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$ และ $B = \left(-\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$

ดังนั้นสมการที่ (4.12a) จึงสมมูลกับสมการที่ (4.12b) เพียงแต่อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ต่างกันเท่านั้น ในการวิเคราะห์นักศึกษาสามารถเลือกใช้รูปแบบใดก็ได้

กรณีที่ 2 เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$ จะได้ค่าราก $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากัน เรียกว่า “รากซ้ำ” กรณีนี้ค่ารากหาได้จากสมการ

$$\lambda = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) = -\frac{b}{2a}$$

ยกตัวอย่างเช่น จากสมการที่ (4.8) หาก a=1, b=6, และ c=9 จะได้สมการเป็น $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ หรือ $(\lambda + 3)(\lambda + 3) = 0$ จึงได้คำตอบเป็น $\lambda = -3, -3$ เป็นต้น กรณีรากซ้ำนี้จะต้องจัดคำตอบให้อยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$y = (Ax + B)e^{\lambda x} \qquad (4.13)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขของปัญหา

กรณีที่ 3 เมื่อ $b^2-4ac<0$ จะได้ค่า λ_1 และ λ_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex roots) (ตัวอย่างของจำนวนเชิงซ้อน เช่น $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\sqrt{-1}=\pm 2i$ ซึ่งนักศึกษาได้เรียนรู้มาแล้ว) ในรูปแบบดังนี้

$$\lambda_1=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)=-\frac{b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{|b^2-4ac|}\ i=\alpha+\omega i$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)=-\frac{b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{|b^2-4ac|}\ i=\alpha-\omega i$$

เมื่อ $\alpha=-\frac{b}{2a}$ และ $\omega=\frac{1}{2a}\sqrt{|b^2-4ac|}$ ดังนั้นคำตอบรูปทั่วไปตามสมการที่ (4.7) คือ $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ จึงเขียนได้เป็นดังนี้

$$y=C_1e^{(\alpha+\omega i)x}+C_2e^{(\alpha-\omega i)x}=C_1e^{\alpha x}e^{\omega xi}+C_2e^{\alpha x}e^{-\omega xi} \qquad (4.14)$$

จากนิยามของ Euler formula

$$e^{\omega xi}=\cos\omega x+i\sin\omega x \qquad (4.15a)$$

$$e^{-\omega xi}=\cos\omega x-i\sin\omega x \qquad (4.15b)$$

แทนค่าสมการที่ (4.15) ลงในสมการที่ (4.14) ได้เป็น

$$\begin{aligned} y&=C_1e^{\alpha x}(\cos\omega x+i\sin\omega x)+C_2e^{\alpha x}(\cos\omega x-i\sin\omega x) \\ &=e^{\alpha x}[(C_1+C_2)\cos\omega x+(C_1-C_2)i\sin\omega x] \end{aligned} \qquad (4.16)$$

จัดรูปจึงได้คำตอบรูปทั่วไป “กรณีรากเชิงซ้อน” เป็นดังนี้

$$y=e^{\alpha x}(A\cos\omega x+B\sin\omega x) \qquad (4.17)$$

เมื่อ $A = C_1 + C_2$ และ $B = (C_1 - C_2)$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบของปัญหา

ตารางที่ 4.1 สรุปรูปทั่วไปของคำตอบสำหรับสมการอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

เงื่อนไข	ชนิดของค่าราก	รูปทั่วไปของคำตอบ
$(b^2 - 4ac) > 0$	- รากจริงกรณีทั่วไป $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - รากจริงกรณีค่ารากเท่ากันแต่เครื่องหมายต่างกัน $\pm\lambda$	$y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ $y = C_1 \sinh\lambda x + C_2 \cosh\lambda x$
$(b^2 - 4ac) = 0$	รากจริงซ้ำ (ค่ารากเท่ากันและเครื่องหมายเหมือนกัน) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y = (Ax + B)e^{\lambda x}$
$(b^2 - 4ac) < 0$	รากเชิงซ้อน	$y = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$

<u>ตัวอย่าง 4.5</u> จงหาผลเฉลยของ $y'' - 9y = 0$ เมื่อ $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 0$

<u>*วิธีทำ*</u> เทียบสัมประสิทธิ์ได้เป็น a=0, b=-9 จึงได้สมการช่วยเป็น

$$\lambda^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{9} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1,\ \lambda_2 = 3,\ -3$$

ค่า λ เป็นจำนวนจริง รูปคำตอบทั่วไปจึงเข้ากรณีที่ 1

$$y = Ae^{3x} + Be^{-3x} \qquad \text{(a)}$$

$$y' = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x} \qquad \text{(b)}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y(0) = 2$ และ $y'(0) = 0$ ลงในสมการ (a) และ (b) ตามลำดับ

$$2 = Ae^{3(0)} + Be^{-3(0)} \quad \Rightarrow \quad A + B = 2 \qquad \text{(c)}$$

$$0 = 3Ae^{3(0)} - 3Be^{-3(0)} \quad \Rightarrow \quad A - B = 0 \qquad \text{(d)}$$

แก้สมการได้ A=B=1 ดังนั้นจึงได้คำตอบเป็น $y = e^{3x} + e^{-3x}$

<u>ตัวอย่าง 4.6</u> แก้ตัวอย่างที่ 4.5 โดยใช้รูปแบบคำตอบตามสมการที่ (4.12b)

<u>*วิธีทำ*</u> จากสมการคุณลักษณะจะได้ $\pm\lambda = 3, -3$ หรือ $\lambda = 3$ รูปคำตอบทั่วไปในรูปฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิกคือ

$$y = C_1 \sinh\lambda x + C_2 \cosh\lambda x = C_1 \sinh 3x + C_2 \cosh 3x \qquad \text{(a)}$$

$$y' = 3C_1\cosh 3x + 3C_2\sinh 3x \qquad \text{(b)}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y(0) = 2$ ลงในสมการ (a) จะได้

$$2 = C_1\underbrace{\sinh 3(0)}_{=0} + C_2\underbrace{\cosh 3(0)}_{=1} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 2$$

แทนค่าเงื่อนไข $y'(0) = 0$ ลงในสมการ (b) จะได้

$$0 = 3C_1\underbrace{\cosh 3(0)}_{=1} + 3C_2\underbrace{\sinh 3(0)}_{=0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

ดังนั้น แทน C_1 และ C_2 ลงในสมการ (a) ได้คำตอบของสมการคือ

$$y = 2\cosh 3x$$

หมายเหตุ $2\cosh 3x = 2\left(\frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2}\right) = e^{3x}+e^{-3x}$ ซึ่งก็คือรูปแบบคำตอบของตัวอย่าง 4.5 นั่นเอง ดังนั้นในกรณีที่ค่ารากของสมการคุณลักษณะเป็น $\pm\lambda$ การแก้ปัญหานักศึกษาสามารถเลือกใช้รูปแบบคำตอบ (4.12a) หรือ (4.12b) อย่างใดอย่างหนึ่งได้ตามที่ถนัด

<u>ตัวอย่าง 4.7</u> จงหาผลเฉลยของ $y'' + 6y' + 9y = 0$ เมื่อกำหนดให้ $y(0) = -4$ และ $y'(0) = 14$

<u>วิธีทำ</u> เทียบสัมประสิทธิ์ได้เป็น a=1, b=6 และ c=9 จึงได้สมการช่วยเป็น

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -3, -3$$

รากทั้งสองเป็นจำนวนจริงและมีค่าเท่ากัน จึงเป็นรากซ้ำ รูปคำตอบทั่วไปจึงเข้ากรณีที่ 2

$$y = (Ax + B)e^{\lambda x} = (Ax + B)e^{-3x} \qquad \text{(a)}$$

$$y' = (Ax + B)\lambda e^{\lambda x} + Ae^{\lambda x} = -3(Ax + B)e^{-3x} + Ae^{-3x} \qquad \text{(b)}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y(0) = -4$ ลงในสมการ (a) จะได้

$$-4 = [A(0) + B]e^{-3(0)} \Rightarrow \quad B = -4 \qquad \text{(c)}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y'(0) = 14$ และ $B = -4$ ลงในสมการ (b) จะได้

$$14 = -3[A(0) + (-4)]e^{-3(0)} + Ae^{-3(0)} \Rightarrow \quad A = 2 \qquad \text{(d)}$$

แทนค่า A, B ลงในสมการ (a) จึงได้คำตอบเป็น $y = (2x - 4)e^{-3x}$

<u>ตัวอย่าง 4.8</u> จงหาผลเฉลยของ $y'' + 4y = 0$ เมื่อ $y(0) = -5$ และ $y'(0) = 2$

วิธีทำ เทียบสัมประสิทธิ์ได้เป็น a=0, b=4 จึงได้สมการช่วยเป็น

$$\lambda^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4}i \quad \Rightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2=2i, -2i$$

ค่า λ เป็นจำนวนเชิงซ้อน รูปคำตอบทั่วไปจึงเข้ากรณีที่ 3

$$y=A\cos(2x)+B\sin(2x) \qquad \text{(a)}$$

$$y'=-2A\sin(2x)+2B\cos(2x) \qquad \text{(b)}$$

แทนค่าเงื่อนไข $y(0)=-5$ และ $y'(0)=2$ ลงในสมการ (a) และ (b) ตามลำดับ

$$-5=A\cos2(0)+B\sin2(0) \quad \Rightarrow \quad A(1)+B(0)=-5 \qquad \text{(c)}$$

$$2=-2A\sin2(0)+2B\cos2(0) \Rightarrow -2A(0)+2B(1)=2 \qquad \text{(d)}$$

แก้สมการได้ A=-5, B=1 ดังนั้นจึงได้คำตอบเป็น $y=-5\cos(2x)+\sin(2x)$

<u>ตัวอย่างที่ 4.9</u> (ปัญหาการถ่ายเทความร้อนของครีบระบายความร้อน)

ครีบระบายความร้อนเป็นอุปกรณ์ที่ช่วยเพิ่มประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อน โดยอาศัยหลักการเพิ่มพื้นที่ผิวการถ่ายเทความร้อน สมการควบคุมการถ่ายเทความร้อนบนครีบ เรียกว่า “สมการครีบ” (Fin equation) (โดยจะไม่ขอนำเสนอที่มาในที่นี้) มีรูปแบบเป็นดังนี้

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{hP}{kA_c}(T-T_\infty)=0 \qquad \text{(a-1)}$$

หรือ $$\frac{d^2\theta}{dx^2}-m^2\theta=0 \qquad \text{(a-2)}$$

เมื่อ $\theta=T-T_\infty$ ส่วน $m^2=hP/kA_c$ เป็นค่าคงที่ โดยที่ T_∞ เป็นอุณหภูมิสภาพแวดล้อมรอบครีบซึ่งเป็นค่าคงที่ P เป็นเส้นรอบรูปหน้าตัดของครีบ h เป็นสัมประสิทธิ์การพาความร้อน k เป็นความสามารถการนำความร้อน และ A_c เป็นพื้นที่หน้าตัดของครีบ

กำหนดให้

แบบฝึกหัดบทที่ 4

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

1.1) $y''-9y=0; \quad y(0)=2,\ y'(0)=0$

1.2) $y''+4y=0; \quad y(0)=-5,\ y'(0)=2$

1.3) $y''-4y'+3y=0; \quad y(0)=-1,\ y'(0)=-5$

1.4) $y''-2y'+10y=0; \quad y(0)=1,\ y'(0)=10$

1.5) $y''+10y'+25y=0$

1.6) $y''+3y'+2y=0$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

2.1) $y''-16y=0; \quad y(0)=1,\ y'(0)=20$

2.2) $y''+6y'+9y=0; \quad y(0)=-4,\ y'(0)=14$

2.3) $4y''-4y'-3y=0; \quad y(-2)=e,\ y'(-2)=-\dfrac{e}{2}$

2.4) $5y''+16y'+12.8y=0; \quad y(0)=0,\ y'(0)=-2.3$

3. จงแก้สมการต่อไปนี้

3.1) $y''+9y=0; \quad y(\pi)=-2,\ y'(\pi)=3$

3.2) $y''+20y'+100y=0; \quad y(0.1)=\dfrac{3.2}{e},\ y'(0.1)=-\dfrac{30}{e}$

3.3) $y''-2y'=0; \quad y(0)=-1,\ y(0.5)=e-2$

3.4) $y''-2y'+2y=0; \quad y(0)=-3,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$