การดำเนินการทางแมทริกซ์

1.1 บทนำ

หากมีคำถามว่า

"มีหมูคอกหนึ่งนับขารวมกันได้ 48 ขา หากหมูทุกตัวไม่พิการขา จงหาว่าหมูทั้งหมดในคอกนี้มีจำนวนเท่าใด?"

นักศึกษาคงจะหาคำตอบได้ไม่ยากโดยการตั้งสมการ

$$4x = 48 \tag{1.1}$$

เมื่อ x แทนจำนวนหมู (ตัว) เลข 4 หมายถึงจำนวนขาของหมูแต่ละตัว และเลข 48 คือจำนวนขารวมของหมูในคอก ซึ่งสามารถแก้สมการได้ว่า

x = 48/4 = 12 ตัว

จะเห็นได้ว่าปัญหาดังกล่าวแก้ได้ไม่ยาก เพราะเป็นปัญหาที่มีสมการ 1 ตัวแปร จึงเพียงแค่ย้ายข้างสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรไปหารค่าคงที่ด้านขวาของสมการก็จะได้คำตอบที่ต้องการ (ซึ่งนักศึกษาได้เรียนรู้วิธีการมาแล้วในชั้นประถมศึกษา)

แต่หากมีคำถามว่า

"มีนกฝูงหนึ่งบินไปเกาะใบบัวจำนวนหนึ่ง หากเกาะใบละ 1 ตัว จะเหลือนก 1 ตัวที่ไม่มีใบบัวให้เกาะ แต่หากเกาะใบละ 2 ตัว จะเหลือใบบัว 1 ใบที่ไม่มีนกเกาะ จงหาว่ามีนกกี่ตัว? และมีใบบัวกี่ใบ?"

นักศึกษาคงสังเกตเห็นว่าโจทย์นี้มีสิ่งไม่รู้ค่าอยู่ 2 อย่าง (ตัวแปร) คือ จำนวนนก และจำนวนใบบัว หากจะแก้ด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาคงเข้าใจได้ทันทีว่าจำเป็นต้องสร้าง 2 สมการขึ้นมาใช้แก้ 2 ตัวแปรดังกล่าวนั้น ดังนั้นจึงได้กำหนดให้ตัวแปร x_1 แทนจำนวนนก และ x_2 แทนจำนวนใบบัว ทำให้ได้ 2 สมการดังกล่าวเป็นดังนี้

$$x_1 - x_2 = 1 \tag{1.2a}$$

$$x_2 - \frac{x_1}{2} = 1 \tag{1.2b}$$

การแก้สมการทำได้ไม่ยาก โดยใช้การกำจัดตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งก่อน จากนั้นจึงแทนค่ากลับเพื่อหาค่าตัวแปรหนึ่งที่เหลือ ซึ่งคำตอบที่ได้คือ $x_1 = 4$ และ $x_2 = 3$ (การแก้ปัญหา 2 ตัวแปรเราได้เรียนรู้ในตอนมัธยมต้น)

แต่หากมีสมการชุดหนึ่งดังนี้

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{1.3a}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \tag{1.3b}$$

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 36 \tag{1.3c}$$

เป็นระบบสมการที่มี 3 สมการและตัวแปร 3 ตัว คือ x_1, x_2 และ x_3 ซึ่งจะเห็นว่ามีความยุ่งยากขึ้นหากจะแก้โดยใช้การกำจัดตัวแปรดังที่กล่าวมาแล้ว แต่หากสามารถจัดระบบสมการที่มี 3 สมการ (หรือมากกว่า) ให้เหลือเพียงสมการเดียวได้ก็จะทำให้การแก้สมการง่ายขึ้น (เพราะจะคล้ายสมการที่ (1.1) ซึ่งแก้ได้ง่าย) หลักการที่ว่าทำได้โดยนำระบบสมการไปจัดรูปเข้าเป็น “สมการแมทริกซ์” ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

หรือเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$Ax = b \tag{1.5}$$

เมื่อ A เป็นแมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient matrix) b เป็นแมทริกซ์ด้านขวามือ (Right-hand-side (RHS) matrix) และ x เป็นแมทริกซ์ตัวแปร

จะเห็นว่าระบบสมการลดรูปเหลือเพียง 1 สมการ 1 ตัวแปร เพียงแต่อยู่ในรูปของสมการและตัวแปรทางแมทริกซ์ การแก้ทำได้โดยใช้หลักการคล้ายกับการแก้สมการที่ (1.1) คือ ย้ายสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร (แมทริกซ์สัมประสิทธิ์) ไปหารค่าคงที่ด้านขวาสมการ (แมทริกซ์ด้านขวามือ) ดังนี้

$$x = \frac{b}{A} \qquad (1.6)$$

ในทางแมทริกซ์ให้นิยาม 1/A ในรูปของแมทริกซ์ผกผัน inv(A) หรือ A^{-1} ดังนั้นจึงเขียนใหม่ได้เป็นดังนี้

$$x = A^{-1}b \qquad (1.7)$$

โดยจะไม่เขียนเป็น $x = bA^{-1}$ เพราะขัดกับหลักการคูณแมทริกซ์ที่ไม่สามารถดำเนินการได้ (ในทางแมทริกซ์การคูณไม่มีคุณสมบัติการสลับที่)

ดังนั้นการจะแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยอาศัยหลักการทางแมทริกซ์เข้าช่วย สิ่งสำคัญที่นักศึกษาต้องทำความเข้าใจคือ การหาแมทริกซ์ผกผันและการคูณแมทริกซ์

1.2 นิยามต่าง ๆ เกี่ยวกับแมทริกซ์

ก่อนที่จะเรียนรู้เรื่องการดำเนินการทางคูณแมทริกซ์ต่างๆ นักศึกษาควรเข้าเกี่ยวกับนิยามทั่วไปของแมทริกซ์ก่อน ดังต่อไปนี้

1.2.1 ข้อกำหนดของแมทริกซ์

กำหนด A เป็นแมทริกซ์ขนาด m x n จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \tag{1.8}$$

เรียกจำนวนแถวในแนวตั้งว่า “คอมลัมน์” ในที่นี้มี n คอลัมน์ และเรียกจำนวนแถวในแนวนอนว่า “แถว” ในที่นี้มี m แถว สมาชิกในแต่ละตำแหน่งระบุด้วยตำแหน่งแถวและคอลัมน์ เช่น a_{12} หมายถึงสมาชิกในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2

1) แมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนคอลัมน์ (m=n) เรียกว่า แมทริกซ์จตุรัส (square matrix) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3x3} \tag{1.9}$$

2) แมทริกซ์ที่มีเพียง 1 แถว (m=1) เรียกว่า แมทริกซ์แถว (row matrix) ส่วนแมทริกซ์ที่มีเพียง 1 คอลัมน์ (n=1) เรียกว่า แมทริกซ์คอลัมน์ (column matrix) ซึ่งทั้งแมทริกซ์แถวและแมทริกซ์คอลัมน์บางครั้งเรียกว่า “เวคเตอร์” และนิยมเขียนอยู่ภายในวงเล็บปีกกา { } เช่น

$$A = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}_{2x1} \qquad B = \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 6 \end{Bmatrix}_{1x3} \tag{1.10}$$

1.2.2 Trace ของแมทริกซ์

Trace ของแมทริกซ์แสดงผลรวมของสมาชิกของแมทริกซ์ในแนวทะแยง ดังนั้นจึงให้นิยามกับเฉพาะแมริกซ์จัตุรัสเท่านั้น ดังนี้

$$\mathrm{trace}[A] = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} \qquad (1.11)$$

ยกตัวอย่างเช่น กำหนดแมทริกซ์ B ขนาด 3x3 ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3x3} \quad \text{จะได้} \quad \mathrm{trace}[B] = 1 + 8 + 9 = 18 \qquad (1.12)$$

1.2.3 แมทริกซ์แนวทะแยง (diagonal matrix)

หมายถึงแมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะในแนวทะแยงจากแนวบนซ้าย-ล่างขวาเท่านั้น (อาจมีค่าเป็นศูนย์ก็ได้) สมาชิกตัวอื่นนอกแนวทะแยงมีค่าเป็นศูนย์ แมทริกซ์ที่มีคุณสมบัตินี้จึงต้องเป็นแมริกซ์จัตุรัสเท่านั้น เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3x3} \qquad (1.13)$$

1.2.4 แมทริกซ์สามเหลี่ยม (triangular matrix)

หมายถึงแมทริกซ์ที่สมาชิกมีค่า (อาจมีค่าเป็นศูนย์ก็ได้) เฉพาะโซนมุมบนขวาของแมทริกซ์ เรียกว่าแมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) หรือมีค่าเฉพาะโซนมุมล่างซ้ายของแมทริกซ์ เรียกว่าแมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) สมาชิกตัวอื่นนอกจากนี้มีค่าเป็นศูนย์ คุณสมบัติของแมทริกซ์แบบสามเหลี่ยมจึงต้องเป็นแมริกซ์จัตุรัสเท่านั้น เช่น A เป็นแมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง ส่วน B เป็นแมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 5 & 0 & 2\end{bmatrix}_{3x3} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 6 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}_{3x3} \qquad (1.14)$$

สำหรับมุมบนซ้ายและมุมล่างขวาของแมทริกซ์นั้นไม่ได้ให้นิยามไว้

1.2.5 แมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)

หมายถึงแมทริกซ์ที่สมาชิกในแนวทะแยงบนซ้าย-ล่างขวา ทุกตัวมีค่าเป็น 1 ส่วนสมาชิกตัวอื่นมีค่าเป็นศูนย์ บางครั้งเรียกว่าแมทริกซ์หนึ่งหน่วย (unit matrix) ดังนั้นแมทริกซ์เอกลักษณ์จึงต้องเป็นแมริกซ์จัตุรัสเท่านั้น และนิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I เช่น

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2x2} \qquad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3x3} \qquad (1.15)$$

คุณสมบัติของแมทริกซ์เอกลักษณ์ I คือเมื่อนำไปคูณกับแมทริกซ์ใดก็จะยังได้ผลลัพธ์เป็นแมทริกซ์นั้นเช่นเดิม หรือ $AI=IA=A$

1.3 การดำเนินการทางแมทริกซ์

1.3.1 ความเท่ากันของแมทริกซ์

แมททริกซ์จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากันและสมาชิกของแมทริกซ์ที่ตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน ยกตัวอย่างเช่น

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

ถ้า $A=B$ จะได้ว่า $a_{11}=4$, $a_{12}=0$, $a_{21}=3$ และ $a_{22}=-1$

1.3.2 ทรานสโพสแมทริกซ์

การทรานสโพสแมทริกซ์คือการจัดสลับระหว่างแถวกับคอลัมน์ของสมาชิกแมทริกซ์แต่ละตัว โดยหมายเลขแถวจะกลายเป็นหมายเลขคอลัมน์และหมายเลขคอลัมน์จกลายเป็นหมายเลขแถว หรือ $a_{ij}^{T} = a_{ji}$ ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad A^{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3\times 2} \tag{1.17}$$

ข้อสังเกตของการทรานสโพสต์แมทริกซ์คือ

1) $(A \pm B)^{T} = A^{T} \pm B^{T}$

2) $(A^{T})^{T} = A$

3) $(AB)^{T} = B^{T}A^{T}$

4) แมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติ $A = A^{T}$ เรียกว่า Symmetric matrix

เช่น $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

ส่วนแมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติ $A = -A^{T}$ เรียกว่า Skew-symmetric matrix

เช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

5) แมทริกซ์ทุกขนาดสามารถดำเนินการทรานสโพสต์ได้

1.3.3 การบวก/ลบแมทริกซ์

แมททริกซ์จะบวก/ลบกันได้ก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากัน การบวก/ลบให้นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาดำเนินการดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

ข้อสังเกตของการบวก/ลบแมทริกซ์คือ

1) มีสมบัติการสลับที่ คือ $A \pm B = B \pm A$

2) มีสมบัติการจัดกลุ่ม คือ $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$

3) มีสมบัติการแจกแจง คือ $k(A \pm B) = kA \pm kB$

1.3.4 การคูณแมทริกซ์

แมทริกซ์จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนคอลัมน์ของแมทริกซ์ตัวตั้งเท่ากับจำนวนแถวของแมทริกซ์ตัวคูณ ส่วนผลลัพธ์ของการคูณจะได้แมทริกซ์ที่มีคุณสมบัติคือ จำนวนแถวของแมทริกซ์ลัพธ์เท่ากับจำนวนแถวแมทริกซ์ตัวตั้ง และจำนวนคอลัมน์ของแมทริกซ์ลัพธ์เท่ากับจำนวนคอลัมน์แมทริกซ์ตัวคูณ

$$[A]_{m \times p}[B]_{p \times n} = [C]_{m \times n}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \qquad (1.19)$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}; \qquad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}; \qquad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$
$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}; \qquad c_{32} = a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$$

ข้อสังเกตของการคูณแมทริกซ์คือ

1) โดยทั่วไปไม่มีสมบัติการสลับที่ กล่าวคือ $A \times B \neq B \times A$

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$

2) มีสมบัติการจัดกลุ่ม คือ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

3) มีสมบัติการแจกแจง คือ $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

1.3.5 ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์

ดีเทอร์มิแนนต์เป็นคุณสมบัติที่สำคัญของแมทริกซ์ โดยแมทริกซ์ที่จะหาดีเทอร์มิแนนต์ได้ต้องเป็นแมทริกซ์จตุรัสเท่านั้น

1) ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์ขนาด 2x2

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1.20)$$

เช่น $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 2 \times 3 = 14$

2) ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์ขนาด 3x3

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1.21)$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

ข้อสังเกตของดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์คือ

1) ดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์จะมีค่าเป็นเลขจำนวนจริงใดๆ เพียงค่าเดียว

2) $\det A = \det(A^T)$

3) $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

1.3.6 ไมเนอร์ / โคแฟกเตอร์ และแอดจอยต์ของแมทริกซ์

คุณสมบัติไมเนอร์ โคแฟกเตอร์ และแอดจอยต์ของแมทริกซ์เป็นนิยามที่สร้างขึ้นเพื่อประกอบการหาดีเทอร์มิแนนต์ในกรณีที่แมทริกซ์มีขนาดใหญ่

1) ไมเนอร์ของแมทริกซ์

กำหนดแมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ไมเนอร์ของแมทริกซ์ A เขียนเป็น

$$M_A = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

โดยไมเนอร์ M_{ij} คือดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์ที่ตัดแถวที่ i คอลัมน์ที่ j ทิ้ง

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น ไมเนอร์ของแมทริกซ์จึงเป็นการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์ที่ตัดแถวและคอลัมน์ที่กำหนดทิ้งไป ค่าของไมเนอร์แต่ละตัวจึงเป็นค่าคงที่

2) โคแฟกเตอร์ของแมทริกซ์

โคแฟกเตอร์ของแมทริกซ์ A สังเคราะห์ต่อได้จากค่าไมเนอร์ โดยนิยามของโคแฟกเตอร์ที่ตำแหน่ง $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ดังนั้นจึงได้

$$C_A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

3) แอดจอยต์ของแมทริกซ์

แอดจอยต์ของแมทริกซ์ให้นิยามเป็นทรานสโพสต์ของโคแฟกเตอร์ของแมทริกซ์ เป็นคุณสมบัติที่ใช้ในการหาอินเวอร์สแมทริกซ์

$$\text{Adj}(A) = C_A^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

1.3.7 อินเวอร์สแมทริกซ์

โดยทั่วไปการหาอินเวอร์สแมทริกซ์ถูกใช้ในขั้นตอนการแก้สมการแมทริกซ์ในรูปแบบสมการที่ 1.4-1.7 หาอินเวอร์สแมทริกซ์ทำได้ดังนี้

$$\text{inv}(A) = A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A)}{\det(A)} \qquad (1.25)$$

ข้อสังเกตสำหรับอินเวอร์สแมทริกซ์

1) แมทริกซ์ที่จะหาอินเวอร์สได้ต้องเป็นแมทริกซ์จตุรัสเท่านั้น และต้องเป็นแมทริกซ์ที่มีค่าดีเทอร์มิแนนต์ไม่เท่ากับศูนย์

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $A^{-1}A = I$

4) แมทริกซ์อินเวอร์ส A^{-1} จะต้องมีขนาดเท่าแมทริกซ์ก่อนอินเวอร์ส A

จากที่กล่าวมาข้างต้น เราต้องการแก้สมการในรูป $Ax = b$ ตามสมการที่ (5) ซึ่งหาก b=0 เรียกว่าสมการ Homogeneous แต่หาก $b \neq 0$ เรียกว่าสมการ Non-homogeneous ซึ่งสมการนี้รูปคำตอบหาได้จาก $x = A^{-1}b$ ดังสมการที่ (1.7) ดังนั้นจึงได้ว่า

$$x = A^{-1}b = \frac{\text{adj}(A)}{|A|} \times b \qquad \text{หรือ} \qquad |A|x = \text{adj}(A) \times b \qquad (1.26)$$

แยกพิจารณาได้ตามเงื่อนไขด้านขวาสมการได้ 4 กรณี ดังนี้

1) $b \neq 0$, $|A| \neq 0$ จะได้รูปแบบที่แก้หาคำตอบ x ซึ่งได้เสมอ และได้คำตอบแบบหนึ่งเดียว (unique solution)

2) $b = 0$, $|A| \neq 0$ จะได้คำตอบเป็น $x = 0$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่มีประโยชน์ (trivial solution) หรือหากพบสมการในรูปแบบนี้ก็ไม่ต้องแก้ให้เมื่อยสมอง

3) $b \neq 0$, $|A| = 0$ จะได้รูปแบบที่แก้หาคำตอบ x ไม่ได้ (none solution)

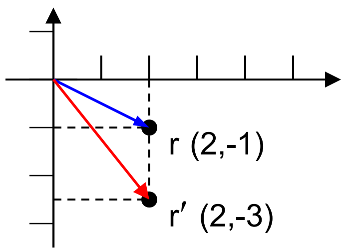
4) $b = 0$, $|A| = 0$ จะได้รูปแบบที่แก้หาคำตอบ x ได้หลายค่า (โดยที่ $x \neq 0$) ซึ่งในกรณีนี้มีความสำคัญที่จะโยงไปถึงปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue problems)

1.4 ปัญหาค่าเฉพาะ

ปัญหาค่าเฉพาะ (Eigenvector) และเวคเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) เป็นหลักการในสาขาพีชคณิตเชิงเส้น (linear algebra) เพื่อใช้ศึกษาการแปลงเชิงเส้น (linear transformation) เกี่ยวข้องกับผลของแมทริกซ์ที่กระทำต่อเวคเตอร์ คำว่า “Eigen-” เป็นคำในภาษาเยอรมันซึ่งถูกใช้โดย Hilbert ในปี 1940

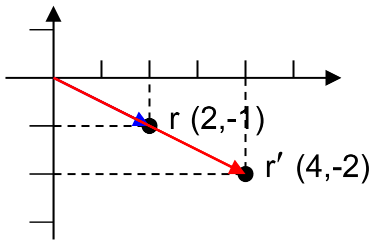
โดยปกติเมื่อแมทริกซ์ A กระทำกับเวคเตอร์ r (คอลัมน์แมทริกซ์) จะได้ผลลัพธ์เป็นเวคเตอร์ r′ ที่มีขนาดและทิศทางเปลี่ยนไปจากเวคเตอร์ r เช่น

$$Ar = r' \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -3 \end{Bmatrix}$$



แต่หากแมทริกซ์ A กระทำกับเวคเตอร์ r แล้วทำให้ได้เวคเตอร์ลัพธ์ r′ ที่เปลี่ยนเฉพาะขนาดแต่ทิศทางไม่เปลี่ยนไปจากเวคเตอร์ r เดิม เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



นั่นแสดงว่าผลของแมทริกซ์ A ทำให้เวคเตอร์ถูกยืดออกไปจากขนาดเดิม 2 เท่า แต่ทิศทางยังคงเดิม ในกรณีเช่นนี้จึงสามารถเขียนได้ว่า $r' = \lambda r$ หรือ

$$Ar = r' = \lambda r \tag{1.27}$$

เรียก r ว่าเวคเตอร์เฉพาะ และเรียกค่าคงที่ λ ว่าค่าเฉพาะซึ่งเป็นค่าคงที่ การแก้ปัญหาที่ใช้หลักการนี้ อาทิ การหาทิศทางหลัก (principal direction) การเสียรูปของหน้าตัด ซึ่งมีความสำคัญมากในการวิเคราะห์ด้านกลศาสตร์วัสดุ การหาความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ของโครงสร้าง เพื่อใช้วิเคราะห์ด้านกลศาสตร์การสั่นสะเทือน เป็นต้น

สมการที่ (1.27) จะเป็นจริงเสมอเมื่อ $r = 0$ แต่ถือเป็นผลลัพธ์ที่ไม่เกิดประโยชน์ (trivial solution) ดังนั้นจึงมองหาคำตอบในกรณีที่ $r \neq 0$ โดยจัดรูปใหม่ดังต่อไปนี้

$$Ar - \lambda r = 0 \tag{1.28a}$$

$$(A - \lambda I)r = 0 \tag{1.28b}$$

$$r = (A - \lambda I)^{-1} b = \frac{\text{adj}\,(A - \lambda I)}{\det\,(A - \lambda I)} b \qquad ;\ (b = 0) \tag{1.28c}$$

$$\det\,(A - \lambda I)r = \text{adj}\,(A - \lambda I)b = 0 \tag{1.28d}$$

เนื่องจาก $r \neq 0$ เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นประโยชน์ ดังนั้นสมการจะเป็นจริงได้ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.29}$$

โดย I เป็นแมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาดเท่ากับแมทริกซ์ A ซึ่งเป็นแมทริกซ์จัตุรัส

<u>ตัวอย่าง 1.1</u> จงหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของ $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> สมการของปัญหาค่าเฉพาะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์

$Ax = \lambda x$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $(A - \lambda I)x = 0$

เมื่อ λ เป็นค่าเฉพาะ และ x เวคเตอร์เฉพาะ ซึ่งแทนค่าได้เป็น

$$\left(\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่เป็นประโยชน์จึงต้องกำหนดให้

$$\det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (-5-\lambda)(-2-\lambda) - (2)(2) = 0$$

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -1,\ -6$$

กรณีที่ 1 เมื่อ $\lambda = \lambda_1 = -1$ แทนในสมการ (1)

$$\begin{bmatrix} -5-(-1) & 2 \\ 2 & -2-(-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

จากสมการสามารถกระจายเป็นสมการเชิงเส้นได้ 2 สมการคือ

$$-4x_1 + 2x_2 = 0 \qquad \text{และ} \qquad 2x_1 - x_2 = 0$$

ทั้งสองสมการมีคำตอบที่เหมือนกันคือ $x_2 = 2x_1$

จะเห็นได้ว่า x_1 และ x_2 เป็นค่าที่แปรตามกัน ในทางปฏิบัติจึงสามารถเลือกค่า x_1 (หรือ x_2) ได้ตามใจชอบ (arbitrary) ยกเว้นศูนย์ เช่น เลือก x_1=1 จะทำให้ได้เวคเตอร์เฉพาะ x สำหรับกรณีค่าเฉพาะ $\lambda = \lambda_1$ เป็นดังนี้

$$x_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

หรืออาจเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$x_{\lambda_1} = k\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix} \quad \text{เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดที่ไม่เท่ากับศูนย์}$$

กรณีที่ 2 เมื่อ $\lambda = \lambda_2 = -6$ แทนในสมการ (a)

$$\begin{bmatrix}-5-(-6) & 2\\ 2 & -2-(-6)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

จากสมการสามารถกระจายเป็นสมการเชิงเส้นได้ 2 สมการคือ

$$x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{และ} \quad 2x_1 + 4x_2 = 0$$

ทั้งสองสมการมีคำตอบเหมือนกันคือ $x_2 = -0.5x_1$ และโดยการเลือก x_1=1 (ค่าเดียวกรณีที่ 1) จะทำให้ได้เวคเตอร์เฉพาะ x สำหรับกรณีค่าเฉพาะ $\lambda = \lambda_2$ ในรูปทั่วไปเป็นดังนี้

$$x_{\lambda_2} = k\begin{Bmatrix}1\\-0.5\end{Bmatrix} \quad \text{เมื่อ k เป็นจำนวนจริงใดที่ไม่เท่ากับศูนย์}$$

โดยทิศทางของเวคเตอร์เฉพาะหาได้ดังนี้

$$\theta_{\lambda_1} = \tan^{-1}(1/2) = 0.464\,\text{rad} \; (26.6^o)$$

$$\theta_{\lambda_2} = \tan^{-1}(1/-0.5) = -1.107\,\text{rad} \; (-63.4^o)$$

<u>ตัวอย่าง 1.2</u> หน้าตัดวงกลมรัศมี r=1 ถูกกระทำด้วยแมทริกซ์แรง $A = \begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}$ จนมีเปลี่ยนรูปร่างไป จงหาทิศทางหลักของการเปลี่ยนรูปและรูปทรงใหม่ของหน้าตัด

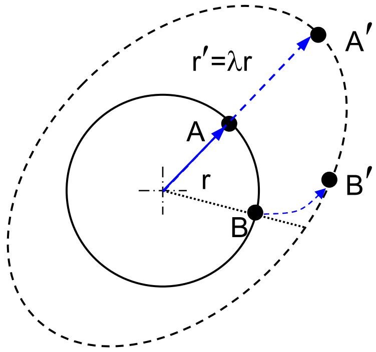
<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้หน้าตัดเดิมอยู่บนระนาบ X-Y ซึ่งมีพิกัดใดๆ บนระนาบเป็น (x, y) หรือเขียนแทนได้ด้วยเวคเตอร์ $r = x\bar{i} + y\bar{j}$ ส่วนหน้าตัดใหม่เมื่อเปลี่ยนรูปไปแล้วบนระนาบ X′-Y′ ซึ่งมีพิกัดใดๆ บนระนาบเป็น (x′, y′) หรือเขียนแทนได้ด้วยเวคเตอร์ $r' = x'\bar{i} + y'\bar{j}$

$$Ar = r' \qquad \text{(a)}$$

ตีความว่าหน้าตัด r ถูกแรง A กระทำและเปลี่ยนรูเป็นหน้าตัด r′ หรือ

$$\begin{bmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix} = \lambda\begin{Bmatrix}x'\\y'\end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

ทิศทางหลักคือทิศทางที่แนวบนหน้าตัดเดิมวางตัวอยู่ในแนวเดียวกับหน้าตัดใหม่ เช่น จากรูปคือแนว A-A′ ส่วนแนว B-B′ ไม่ใช่ทิศทางหลัก สำหรับในกรณีปัญหานี้คือเวคเตอร์ r และ r′ วางตัวในทิศทางเดียวกัน ดังรูป



หากสมมุติว่าทิศทางดังกล่าวหน้าตัดใหม่ถูกยืดออกไปเป็น λ เท่าของหน้าตัดเดิม จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างเวคเตอร์บนหน้าตัดทั้งคู่เป็นดังนี้

$$r' = \lambda r \qquad \text{(c)}$$

จากสมการ (a) และ (b) จึงได้ว่า

$$Ar = \lambda r \qquad \text{หรือ} \qquad (A - \lambda I)r = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\left(\begin{bmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

สมการจะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\det(A - \lambda I) = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\det\begin{bmatrix}5-\lambda & 3\\ 3 & 5-\lambda\end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(f)}$$

$$(5-\lambda)(5-\lambda) - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 8)(\lambda - 2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = 8,\ 2$$

เป็นความนิยมที่มักเรียนค่าเฉพาะจากค่าจากมากไปหาน้อย ดังนั้นจึงได้ $\lambda_1 = 8$ และ $\lambda_2 = 2$ การพิจารณาจึงแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $\lambda = \lambda_1 = 8$ แทนในสมการ (e)

$$\begin{bmatrix}5-8 & 3\\ 3 & 5-8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 3\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad y = x$$

สามารถเซตความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y ด้วยค่าอย่างใจชอบ (arbitrary) (ยกเว้นศูนย์) เช่น เลือก x=1 จะได้ y=1 ซึ่งจะทำให้ได้ Eigenvector เป็น

$$r = x\bar{i} + y\bar{j} = \bar{i} + \bar{j}$$

เวคเตอร์นี้อยู่ในทิศทาง $\theta_1 = \tan^{-1}(1/1) = 45^{\circ}$ ในทิศทางนี้จึงได้ว่า $r' = \lambda_1 r = 8r$ หรือหน้าตัดถูกยืดออกไป 8 เท่าของหน้าตัดเดิม

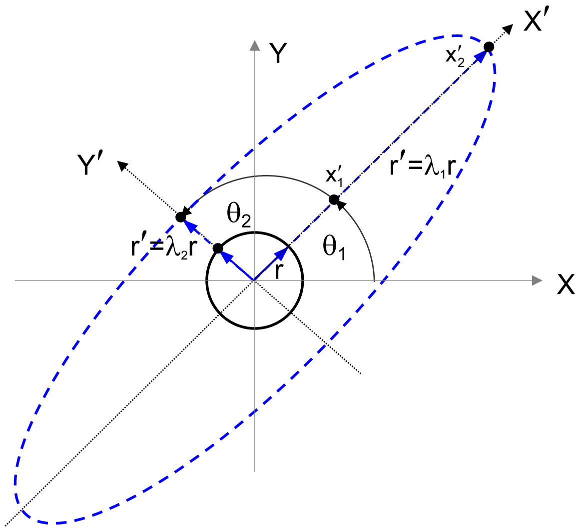
กรณีที่ 2 เมื่อ $\lambda = \lambda_1 = 2$ แทนในสมการ (e)

$$\begin{bmatrix} 5-2 & 3 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad y = -x$$

เลือก x=1 (เหมือนกรณี 1) จะได้ y= -1 ซึ่งจะทำให้ได้ Eigenvector เป็น

$$r = x\bar{i} + y\bar{j} = \bar{i} - \bar{j}$$

เวคเตอร์นี้อยู่ในทิศทาง $\theta_2 = \tan^{-1}(1/-1) = 135^{\circ}$ ในทิศทางนี้จึงได้ $r' = \lambda_2 r = 2r$ หรือหน้าตัดถูกยืดออกไป 2 เท่าของหน้าตัดเดิม



หมายเหตุ ในกรณีนี้บางครั้งเรียก λ ว่าเป็น expansion factor ($\lambda > 1$) ซึ่งส่งผลให้หน้าตัดถูกยืดออก และเรียกกรณี $\lambda < 1$ ว่า contraction factor ซึ่งส่งผลให้หน้าตัดถูกกดยุบเข้า

พิจารณาระนาบ X′-Y′ ซึ่งแกนระนาบอยู่ในแนวเดียวกับทิศทางหลักจากหน้าตัดเดิมซึ่งเป็นวงกลมรัศมี 1 หน่วย จะได้สมการของหน้าตัดเดิมเป็น

$$x_1'^2 + y_1'^2 = r^2 = 1 \qquad \text{(g)}$$

เมื่อหน้าตัดเปลี่ยนรูปโดยยืดออกไปตามแกน X′ (ทิศทางหลักที่ 1) เป็นระยะ 8 เท่าของหน้าตัดเดิม หรือ 8r และยืดออกไปตามแกน Y′ (ทิศทางหลักที่ 2) เป็นระยะ 2 เท่าของหน้าตัดเดิม หรือ 2r จึงได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$x'_1 = r \qquad x'_2 = 8x'_1 = 8r \qquad$ หรือ $\qquad x'_1 = x'_2/8$

$y'_1 = r \qquad y'_2 = 2y'_1 = 2r \qquad$ หรือ $\qquad y'_1 = y'_2/2$

แทนความกลับไปในสมการวงกลมของหน้าตัดเดิมจะได้

$$\frac{x_2'^2}{64} + \frac{y_2'^2}{4} = 1 \qquad \text{(h)}$$

รูปสมการของหน้าตัดใหม่ที่ได้เป็นสมการวงรีซึ่งมีแกนเอกยาว 16 หน่วย และแกนโทยาว 4 หน่วย

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

จงแสดงว่า A เป็น Symmetric matrix และ B เป็น Skew-symmetric matrix

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา

 2.1) $(A + B)^T$

 2.2) $4(A + 2B)^T$

3. จงหาผลคูณของ

 3.1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 3.2) $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $(AB)^T = B^T A^T$

5. จงพิสูจน์ว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

6. จงพิสูจน์ว่า $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$

7. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมทริกซ์

7.1) $\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ -4 & 13 \end{bmatrix}$ 7.2) $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

7.3) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 7.4) $\begin{bmatrix} 16 & 22 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 12 & 25 & 2 \end{bmatrix}$

8. จงหาอินเวอร์สแมทริกซ์ของ

8.1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 8.2) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$

8.3) $\begin{bmatrix} \cos 3\theta & \sin 3\theta \\ -\sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$ 8.4) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

8.5) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ -0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & -1.5 \end{bmatrix}$ 8.6) $\begin{bmatrix} 19 & 2 & -9 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. จงหาค่าเฉพาะและเวคเตอร์เฉพาะของ

9.1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ 9.2) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

9.3) $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ 9.4) $\begin{bmatrix} 3.50 & 1.00 \\ 0.75 & 2.50 \end{bmatrix}$

9.5) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

10. จงหาทิศทางหลักของการเสียรูปแบบยืดหยุ่น (elastic deformation) ของระบบภายใต้เงื่อนไข $r' = Ar$ เมื่อ r' และ r เป็นพิกัดของหน้าตัดเดิมและหน้าตัดใหม่ที่เกิดจากการเสียรูป ตามลำดับ ส่วน A เป็นแมทริกซ์แรงที่มีค่าตามโจทย์ข้อ 9 พร้อมทั้งบอกว่าแต่ละทิศทางเป็นการเสียรูปแบบยืดตัว (extension) หรือยุบตัว (contraction)