Example 1.1 Air with stagnation conditions P_0=200 kPa, T_0=500 K flows through a throat to an exit Mach number of 2.5. The desired *maximum* mass flow rate is 3.0 kg/s, determine (a) throat area, (b) exit pressure, exit temperature, exit velocity and exit area.

Solution

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{200\,\text{kPa}}{(0.287\,\text{kJ/kg})\cdot(500\text{K})} = 1.394\,\text{kg/m}^3$$

Since it necessarily flows through a sonic throat:

$$\dot{m}_{max} = \rho_0 A^* \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} (\gamma R T_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$A^* = \frac{\dot{m}_{max}}{\rho_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} (\gamma R T_0)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{3\,\text{kg/s}}{\left(1.394\,\text{kg/m}^3\right)\cdot\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}} (1.4 \times 287\,\text{kJ/kgK} \times 500\text{K})^{\frac{1}{2}}} = 0.0083\,\text{m}^2$$

Since M_e in known, use the isentropic relations to find other exit conditions

$$p_e = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = (200\,\text{kPa})\left(1 + \frac{1.4-1}{2} 2.5^2\right)^{\frac{-1.4}{1.4-1}} = 11.7\ \text{kPa}$$

$$\rho_e = \frac{p_e}{RT_e} = \frac{11.7\,\text{kPa}}{(0.287\,\text{kJ/kgK})(222.2\text{K})} = 0.1834\,\text{kg/m}^3$$

Now the exit velocity and exit area are simply

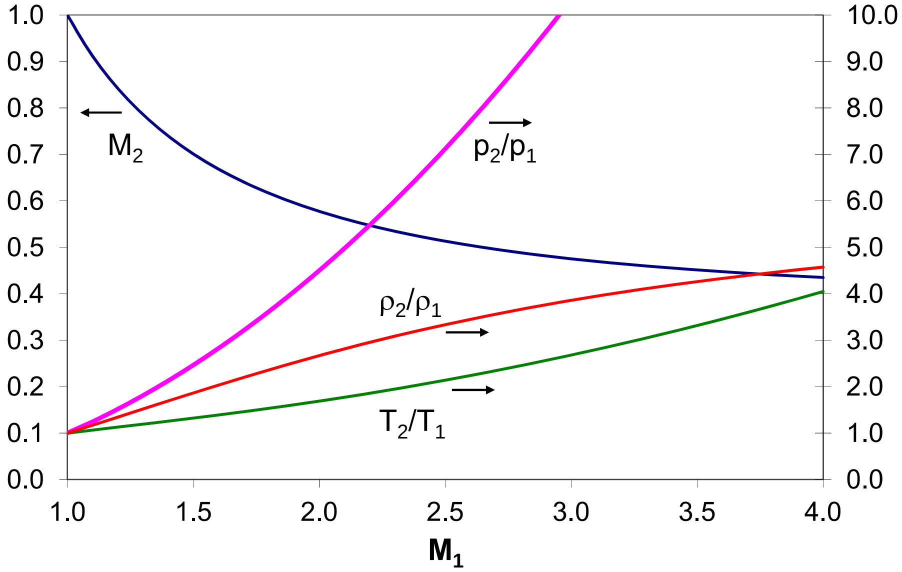
$$v_e = M_e a_e = M_e \sqrt{\gamma R T_e} = 2.5\sqrt{1.4(287\text{J/kgK})(222.2\text{K})} = 747\,\text{m/s}$$

$$A_e = \frac{A^*}{M_e}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2\right)\right]^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \frac{0.0083\,\text{m}^2}{2.5}\left[\frac{2}{1.4+1}\left(1 + \frac{1.4-1}{2} 2.5^2\right)\right]^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}} = 70\,\text{m}^2$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{2\gamma M_1^2-\gamma+1}} \;;\; \frac{p_2}{p_1} = \frac{1+\gamma M_1^2}{1+\gamma M_2^2} \;;\; \frac{T_2}{T_1} = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_2^2} \;;\; \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2/p_1}{T_2/T_1}$$

According to above expressions with γ = 1.4 and M_1 is varied from 1.00 - 4.00, the relation can be calculated as follow:

No	M_1	M_2	p_2/p_1	T_2/T_1	ρ_2/ρ_1
1	1.00	1.00	1.0000	1.0000	1.0000
2	1.20	0.84	1.5133	1.1280	1.3416
3	1.40	0.74	2.1200	1.2547	1.6897
4	1.60	0.67	2.8200	1.3880	2.0317
5	1.80	0.62	3.6133	1.5316	2.3592
6	2.00	0.58	4.5000	1.6875	2.6667
7	2.20	0.55	5.4800	1.8569	2.9512
8	2.40	0.52	6.5533	2.0403	3.2119
9	2.60	0.50	7.7200	2.2383	3.4490
…	…	…	…	…	…
16	4.00	0.43	18.5000	4.0469	4.5714

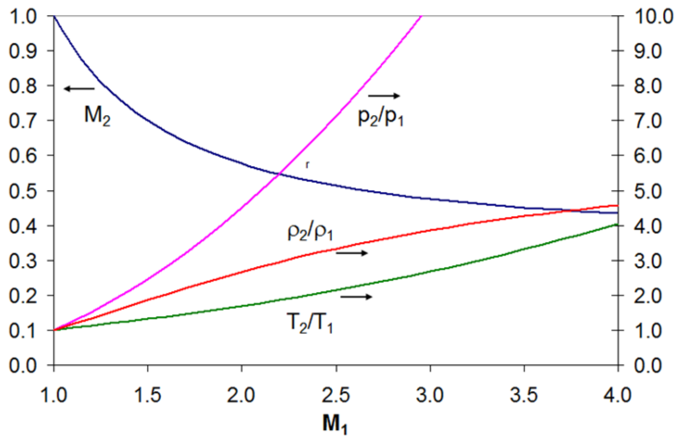


Normal Shock Properties

Derive the following relations

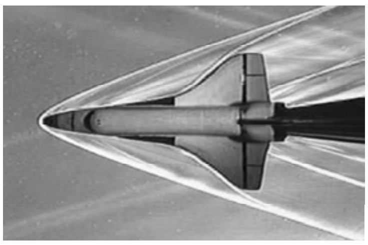
$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 - 1\right) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

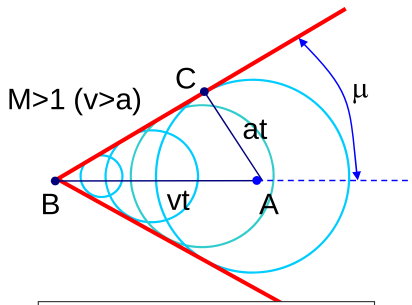
Prove them !!



Properties behind a normal shock wave as a function of upstream Mach number

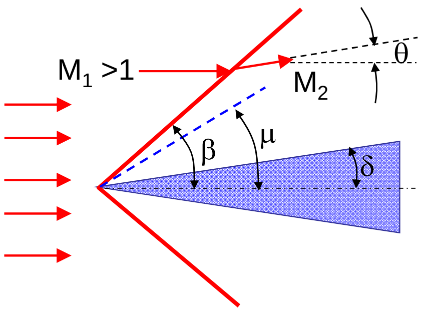
Mach Wave





$$\sin\mu = at/vt = a/v = 1/M$$

$$\mu = \sin^{-1}(1/M)$$



μ = Mach Angle
β = Shock angle
δ = Wedge half angle
θ = Deflection angle (~ δ)

คำแนะนำ

1. ให้นักศึกษาจัดรูปแบบเอกสารให้ได้ลักษณะตามที่ปรากฏในข้อสอบ
    1.1 ข้อสอบแผ่นที่ 1 เกี่ยวกับการจัดพิมพ์เอกสารและสมการทางคณิตศาสตร์ (10 คะแนน)
    1.2 ข้อสอบแผ่นที่ 2 เกี่ยวกับการนำสมการทั้ง 4 สมการ มาจัดรูปแบบการคำนวณบน Excel นำข้อมูลที่คำนวณได้ไปแสดงกราฟ จากนั้นนำข้อมูลและกราฟมาจัดวางเป็นงานเอกสารบน Word (10 คะแนน)
    1.3 ข้อสอบแผ่นที่ 3 เกี่ยวกับวางรูปแบบไฟล์ PowerPoint ซึ่งต้องอาศัยการพิมพ์ข้อความและสมการ การวาดรูป การวางรูป และการเลือก Template จากนั้นนำหน้าสไลด์ดังกล่าวมาจัดวางเป็นงานเอกสารบน Word (10 คะแนน)
2. ให้บันทึกไฟล์ที่ได้จากข้อ 1 ในชื่อรหัสของนักศึกษา (Bxxxxxxx.docx) จากนั้นแปลงไฟล์ดังกล่าวให้เป็นไฟล์นามสกุล .pdf
3. ส่งไฟล์งาน .pdf เข้าอีเมล jullada@sut.ac.th