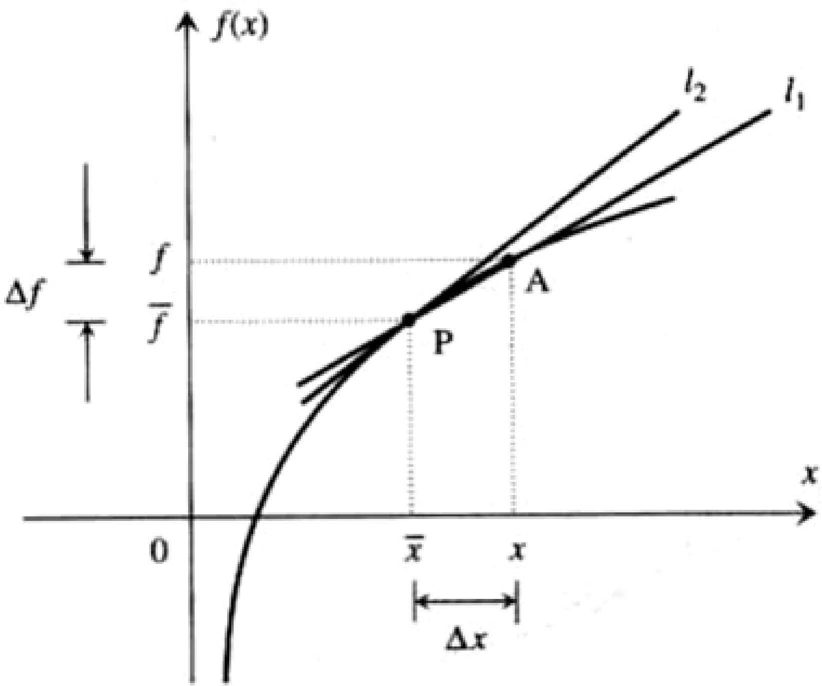
Linearization of Nonlinear Mathematical Models

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

Graphical Interpretation



let $P:\left(\bar{x}, \bar{f}\right)$ – operating point

let $A:\left(x, f\right)$ – typical point

l_1 – line connecting point P,A

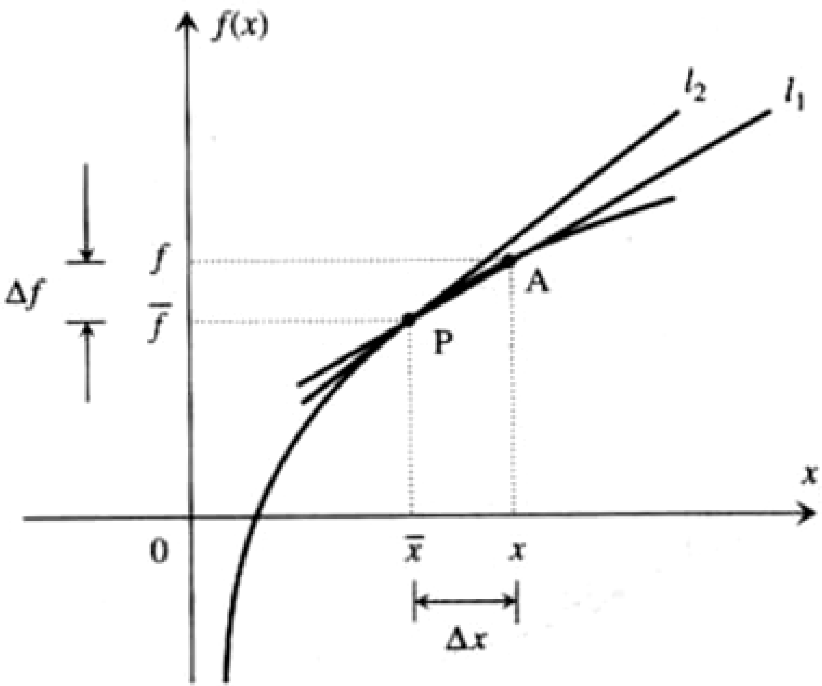
$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}$$

และ

$$\Delta f(t) = f(t) - \bar{f}$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

Graphical Interpretation

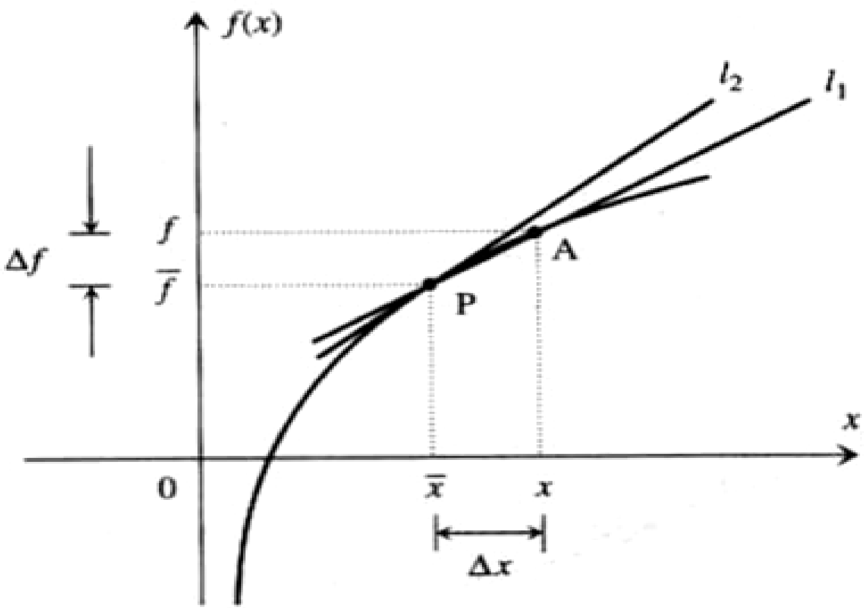


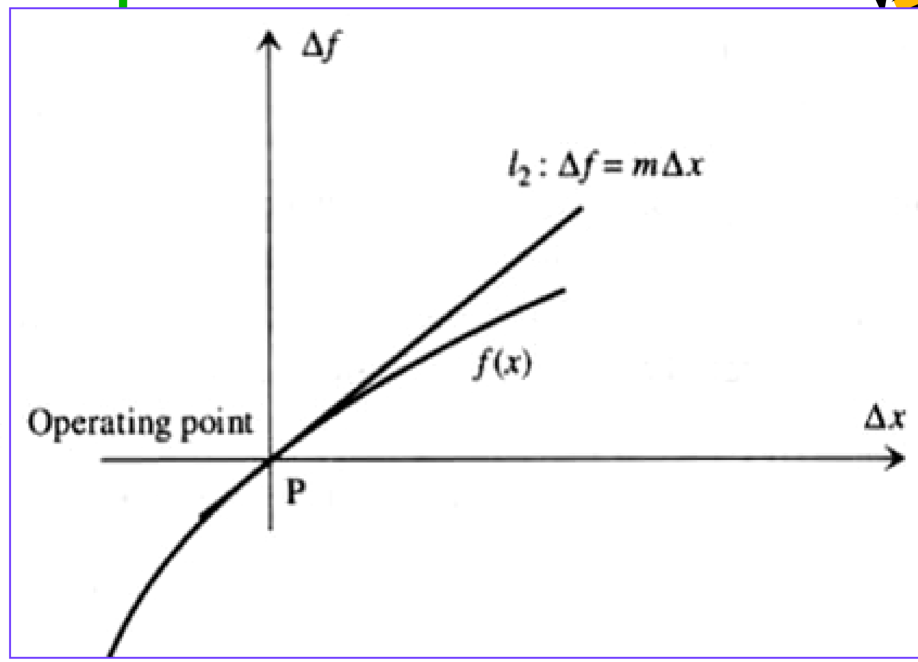
ถ้าให้จุด A ใกล้กับจุด Pมากๆ ทำให้ค่า ΔxและΔf มีค่าน้อยมาก จึงทำให้เราประมาณได้ว่าความชันของเส้นl_1และl_2 เท่ากัน

$$m = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

Graphical Interpretation





$$f - \bar{f} = m(x - \bar{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta f = m\Delta x$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

พิจารณาระบบซึ่งมีอินพุท x(t) และเอาท์พุท y(t) ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างทั้งสอง สามารถเขียนอยู่ในรูปนี้

$$\boxed{y = f(x)} \qquad \text{Eq.1}$$

ถ้าเงื่อนไขปกติมีลักษณะเช่นเดียวกัน $\bar{x}, \bar{y}$ ดังนั้นสมการข้างต้นอาจจะเขียนอยู่ในรูปของ Taylor series

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
&= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

โดยที่ derivative $df/dx, d^2 f/dx^2, \ldots$ are evaluated at $x = \bar{x}$

ถ้าการเปลี่ยนแปลง มีค่าน้อย, เราอาจจะไม่คิดคำนึงถึงในเทอมที่มีลำดับสูงๆ ดังนั้นสมการข้างต้นจะเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\boxed{y = \bar{y} + m(x - \bar{x})} \qquad \text{Eq.2}$$

โดยที่

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$m = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

สมการที่ 2 อาจจะเขียนในรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\boxed{y-\bar{y}=\Delta y=m\left(x-\bar{x}\right)} \Longleftrightarrow \boxed{\Delta f = m\Delta x} \quad \text{Eq.3}$$

อันซึ่งจะเห็นได้ว่า $y-\bar{y}$ แปรผันตรงกับ $x-\bar{x}$

และสมการที่ 3 เป็นสมการเชิงเส้นสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นมีเอาท์พุท $y(\mathrm{t})$ มีฟังก์ชั่นของอินพุท x_1 และ x_2

$$\boxed{y = f(x_1, x_2)} \qquad \text{Eq.3}$$

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2)\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2\right]$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models

พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นมีเอาท์พุท y(t) มีฟังก์ชั่นของอินพุท x_1 และ x_2

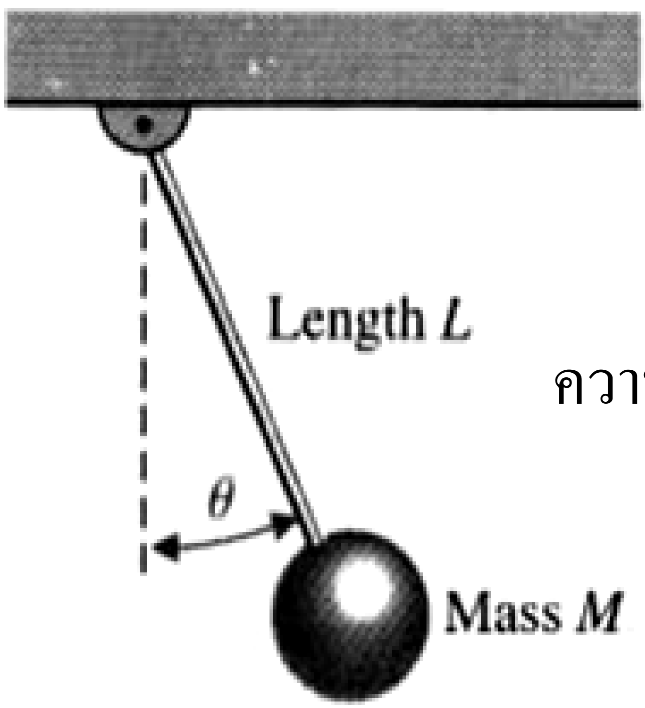
$$y - \bar{y} = \Delta y = m_1\left(x_1 - \bar{x}_1\right) + m_2\left(x_2 - \bar{x}_2\right)$$

โดยที่

$$\bar{y} = f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2\right), m_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2},$$

$$m_2 = \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}$$

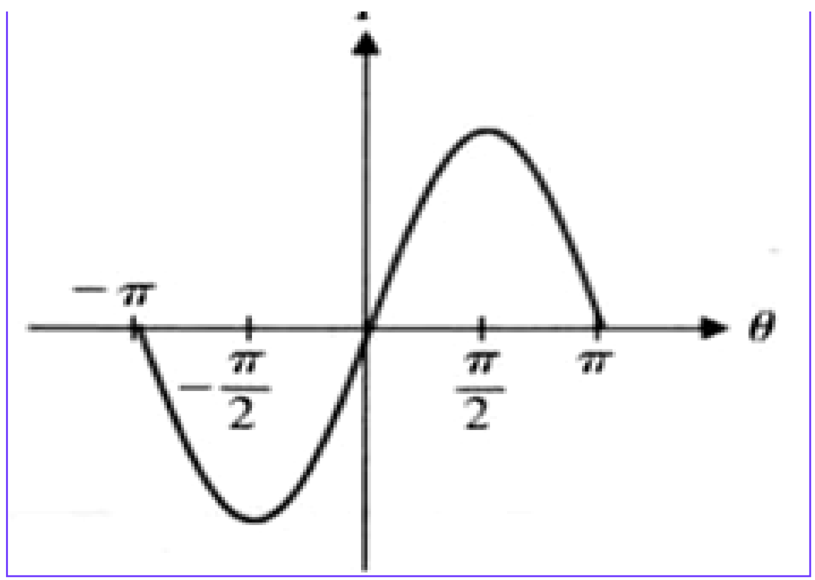
Linearization of Nonlinear Mathematical Models
:Pendulum oscillator model



แรงบิดที่กระทำต่อมวล

$$T = Mgl\sin\theta$$

ความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นระหว่าง T และ θ



Linearization of Nonlinear Mathematical Models
:Pendulum oscillator model

ถ้าเราเลือก operating point ที่ $\theta_0 = 0°$ดังนั้น linear approximation จะได้ดังนี้

$$T - T_0 \cong MgL \left.\frac{\partial \sin\theta}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} (\theta - \theta_0)$$

โดยที่ $T_0=0$ ดังนั้นเราจะได้สมการดังนี้

$$\boxed{T = MgL(\cos\theta)(\theta - 0^\circ) = MgL\,\theta}$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models
:Pendulum oscillator model

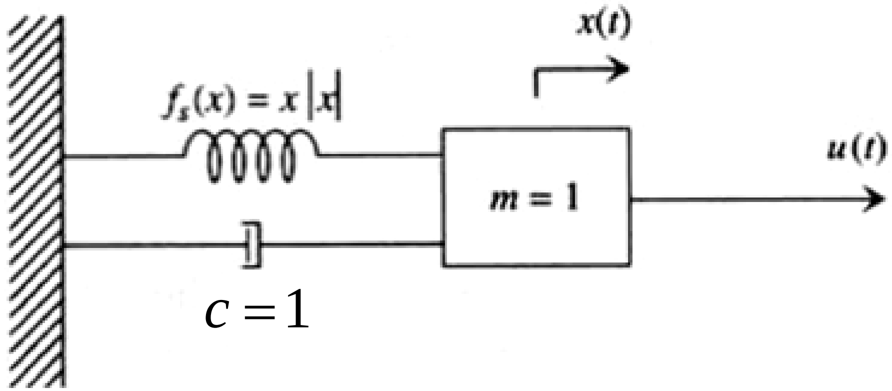
$$T = MgL\theta$$

ซึ่งสมการนี้เป็นเชิงเส้นซึ่งจะมีค่าแม่นยำพอที่ยอมรับได้อยู่ในช่วง

$$(-\pi/4) \leq \theta \geq (\pi/4)$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models,

Mechanical system with nonlinear spring



พิจารณาจากรูป เราจะได้แบบจำลองคณิตศาสตร์ดังนี้

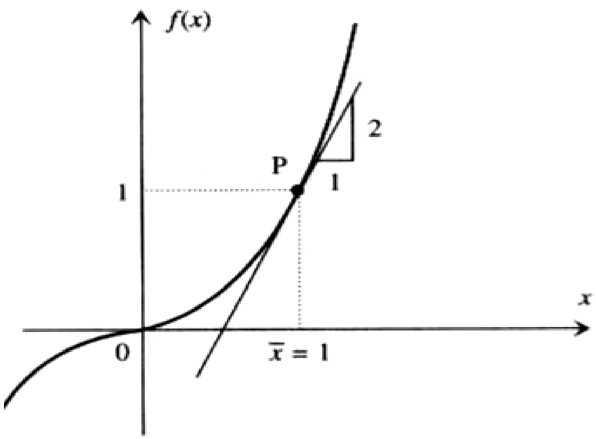
$$u(t) - c\dot{x} - f_s(x) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} - c\dot{x} - x|x| = u(t)$$

Linearization of Nonlinear Mathematical Models,

Mechanical system with nonlinear spring

จากรูป m=1, c=1 เราจะได้ดังนี้

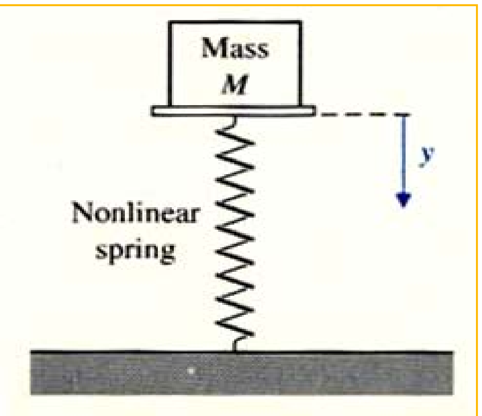


$$\ddot{x} - \dot{x} - x|x| = u(t)$$

และกำหนดจุด P เป็น operating point

Linearization of Nonlinear Mathematical Models,

A mass sitting on a nonlinear spring



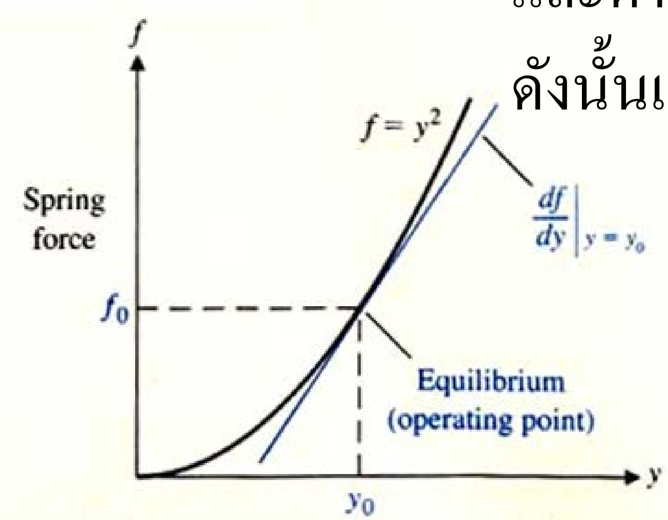
พิจารณาช่วงการทำงานปกติ(เชิงเส้น) โดยตำแหน่งสภาพคงที่เกิดขึ้น เมื่อแรงสปริงสมดุลกับแรงโน้มถ่วง Mg,

$$\boxed{f_0 = \bar{f} = Mg}$$

สำหรับสปริงที่ไม่เป็นเชิงเส้น $\boxed{f = y^2}$

และตำแหน่งสภาพคงที่ $\boxed{y_0 = \bar{y} = (Mg)^{1/2}}$

ดังนั้นแบบจำลองที่เป็นเชิงเส้น สำหรับการหักเหที่มีค่าน้อย



$$f - \bar{f} = K(y - \bar{y})$$