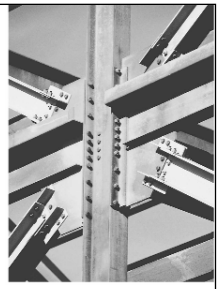


MECHANICS OF MATERIALS

By

Assoc. Prof. Dr. Sittichai Seangatith

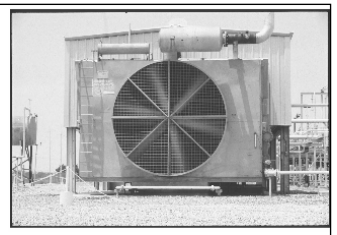
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING

INSTITUTE OF ENGINEERING

SURANAREE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

บทที่ 5

Torsion

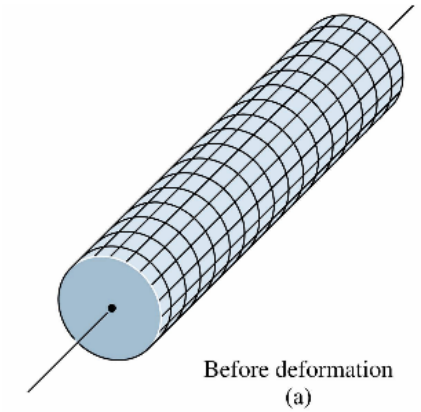


วัตถุประสงค์

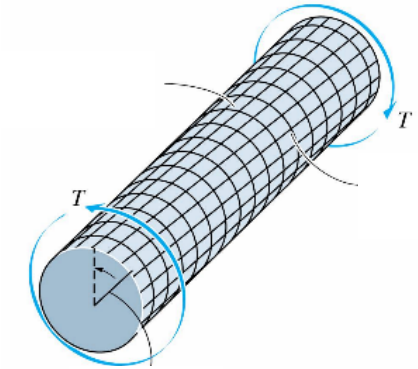
1. เพื่อให้ทราบและเข้าใจถึงการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเพลากลมเนื่องจากการบิด (torsion)
2. เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ชิ้นส่วนของโครงสร้างที่รับแรงบิดแบบ statically determinate และแบบ statically indeterminate เพื่อหาหน่วยแรงเฉือน (shear stress) และมุมบิด (angle of rotation) ได้
3. เพื่อให้สามารถวิเคราะห์ (analysis) และออกแบบ (design) เพลาส่งกำลังได้

5.1 การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของเพลากลมภายใต้แรงบิด

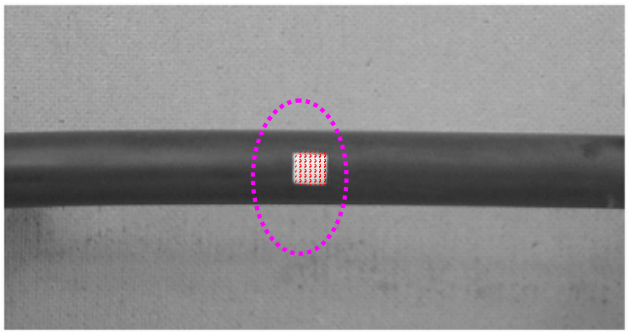
เพลาทำด้วยวัสดุ isotropic และ homogeneous มีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic และสามารถเปลี่ยนแปลงรูปร่างได้

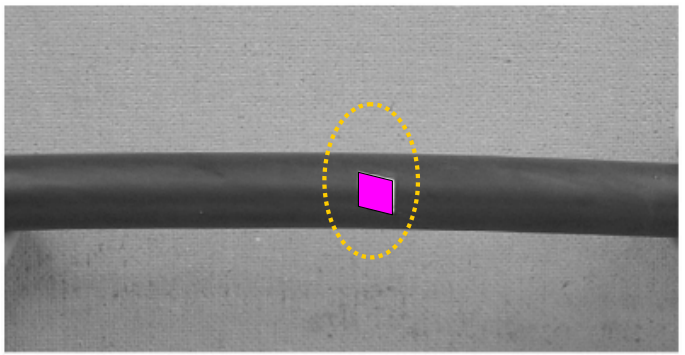


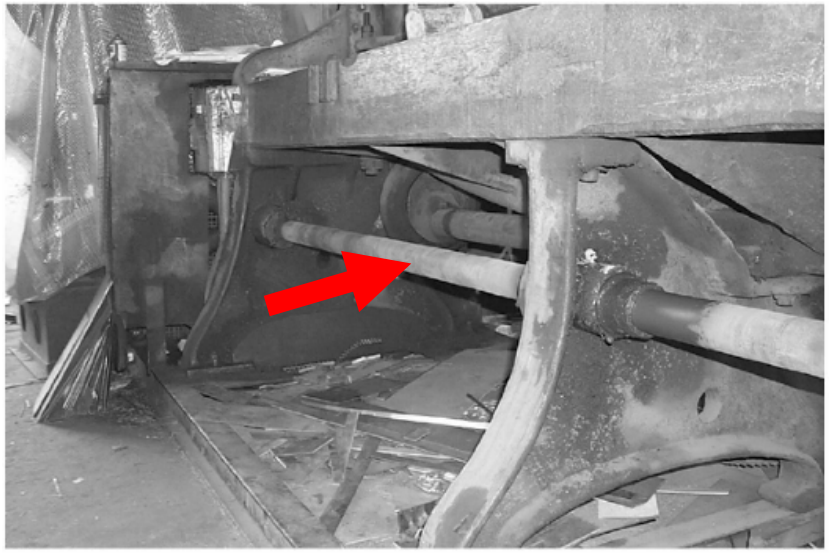
Before deformation
(a)



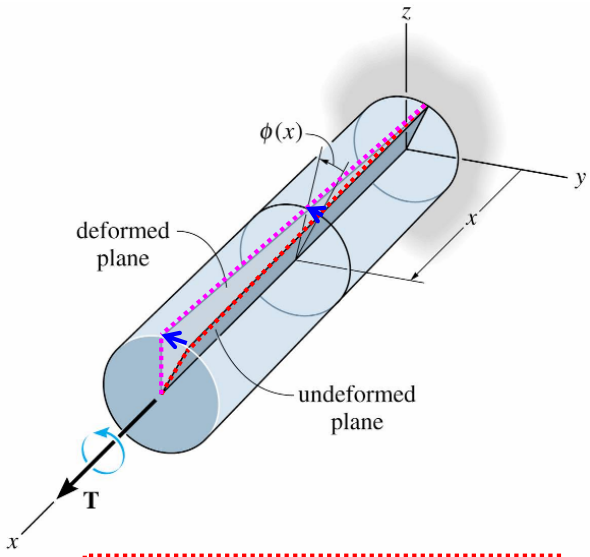
After deformation
(b)







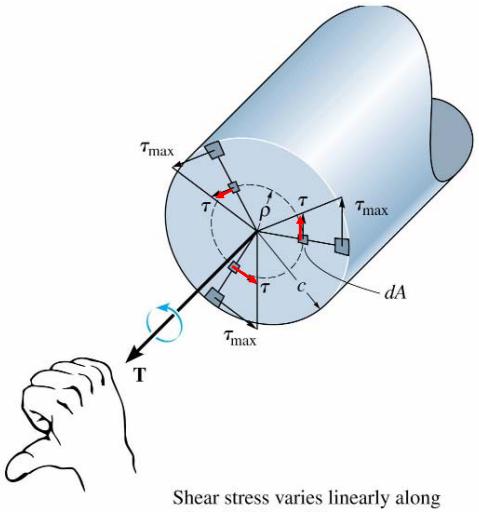
ถ้ามุมบิดมีค่าน้อยแล้ว ความยาวและรัศมีของเพลาจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงภายใต้แรงบิด



The angle of twist $\phi(x)$ increases as x increases.

5.2 สมการแรงบิด (torsion formula)

หน่วยแรงเฉือนในเพลาหน้าตัดกลมทำด้วยวัสดุ isotropic and homogeneous material และมีพฤติกรรมอยู่ในช่วง linear elastic ภายใต้แรงบิดอยู่ในรูป



Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$ **torsion formula**

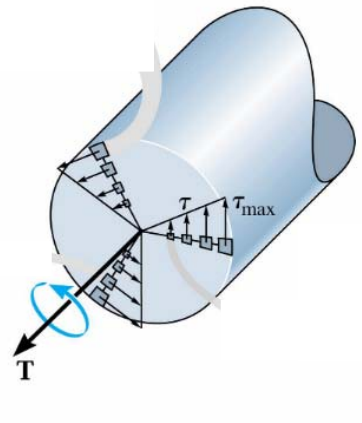
หน่วยแรงเฉือนสูงสุด

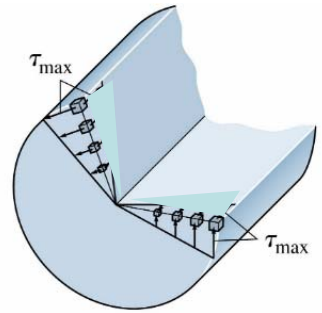
$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J}$$

polar moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัด, J

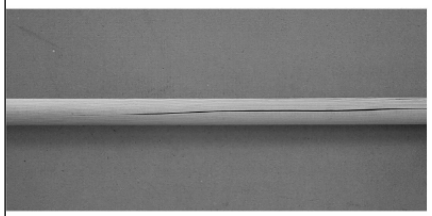
สำหรับเพลาหน้าตัดกลมตัน

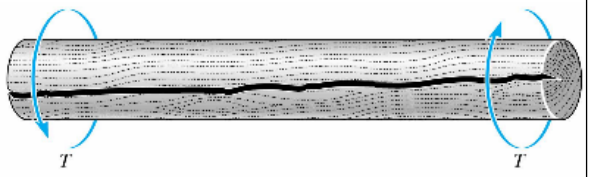
$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \qquad J = \frac{\pi}{32}d^4$$





Shear stress varies linearly along each radial line of the cross section.

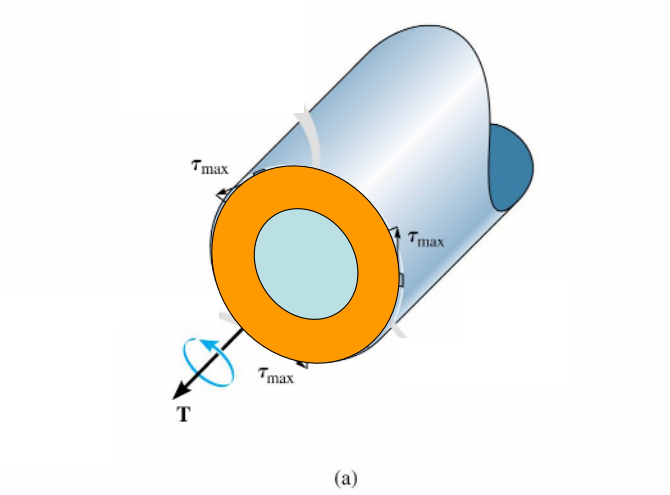




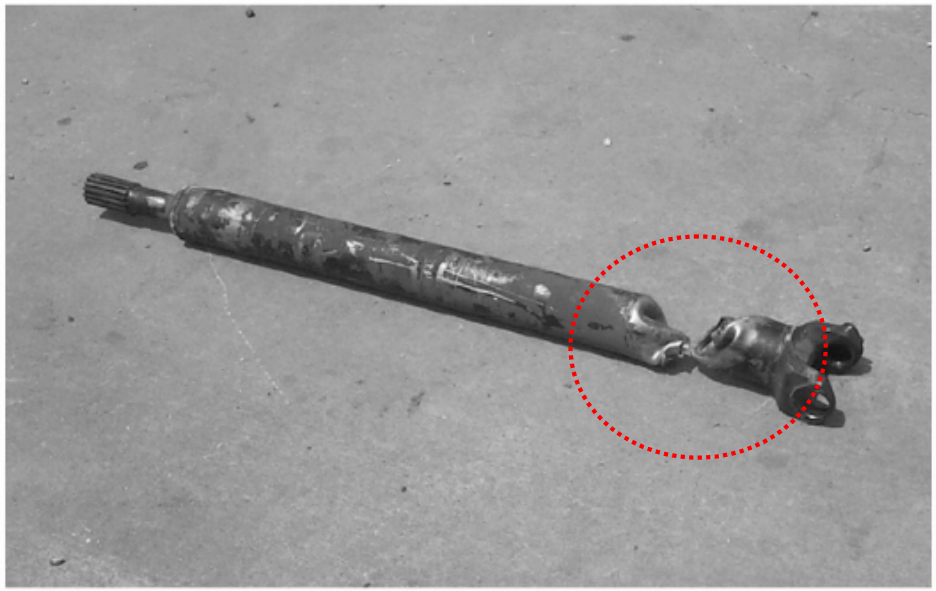
Failure of a wooden shaft due to torsion.

เพลากลวงมีประสิทธิภาพในการใช้วัสดุต้านทานต่อแรงบิดมากกว่าเพลาตัน
เนื่องจากพื้นที่ส่วนใหญ่ของเพลากลวงอยู่ห่างออกไปจากศูนย์กลางของเพลา

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \qquad J = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4)$$

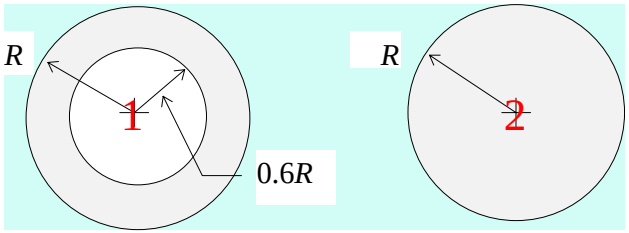


(a)



ตัวอย่างที่ 5-1

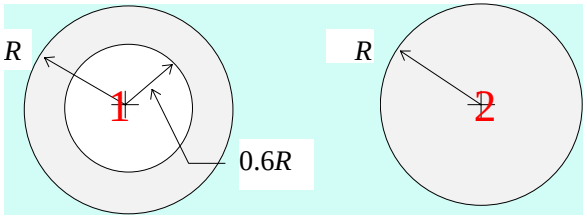
เพลาทั้งสองถูกกระทำโดยแรงบิดที่มีค่าเท่ากัน จงเปรียบเทียบค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้น และน้ำหนักของเพลากลวงต่อเพลาตัน



Polar moment of inertia ของเพลากลวงและเพลาตัน

$$J_1 = \frac{\pi(c_o^4 - c_i^4)}{2} = \frac{\pi}{2}(R^4 - (0.6R)^4) = 0.4352\pi R^4$$

$$J_2 = \frac{\pi R^4}{2} = 0.5\pi R^4$$



อัตราส่วนของหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลากลวงต่อเพลาตัน

$$\frac{(\tau_{max})_1}{(\tau_{max})_2} = \frac{\cancel{TR}}{0.4352\pi\cancel{R^4}} \frac{0.5\pi\cancel{R^4}}{\cancel{TR}} = \frac{0.5}{0.4352} = 1.15$$

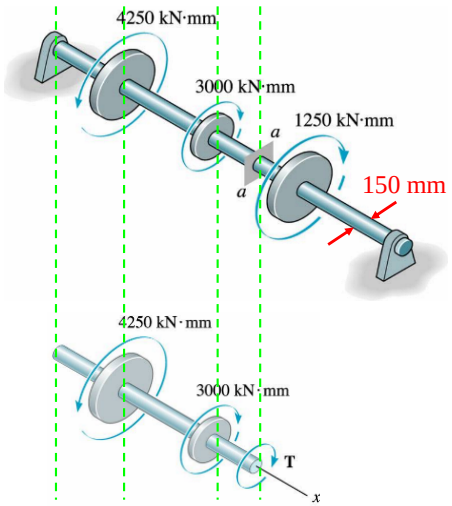
อัตราส่วนของน้ำหนักของเพลากลวงต่อเพลาตัน

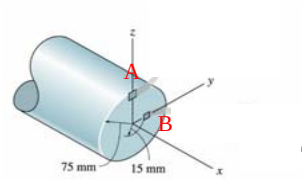
$$\frac{(W)_1}{(W)_2} = \frac{\cancel{\gamma L\pi}[R^2 - (0.6R)^2]}{\cancel{\gamma L\pi} R^2} = 0.64$$

สรุป เพลากลวงมีค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดมากกว่าเพลาตัน 15% แต่มีน้ำหนักเบากว่าเพลาตันถึง 36%

Example

เพลาถูกรองรับโดย bearing และถูกกระทำโดยแรงบิด จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนที่จุด A และจุด B บนหน้าตัด a-a ของเพลา





หาแรงบิดภายในที่หน้าตัด a-a

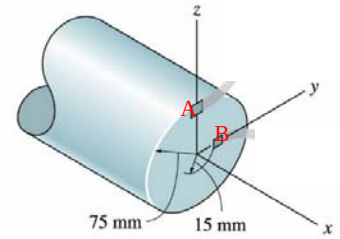
$$\Sigma M_x = 0;$$

$$4250\ \text{kN·mm} - 3000\ \text{kN·mm} - T = 0$$

$$T = 1250\ \text{kN·mm}$$

Polar moment of inertia ของเพลา

$$J = \frac{\pi}{2}(75\ \text{mm})^4 = 4.97 \times 10^7\ \text{mm}^4$$



ที่จุด A

$$\tau_A = \frac{Tc}{J} = \frac{1250\ \text{kN·mm} \times 75\ \text{mm}}{4.97 \times 10^7\ \text{mm}^4}$$

$$= 1.89\ \text{N/mm}^2 = 1.89\ \text{MPa}$$

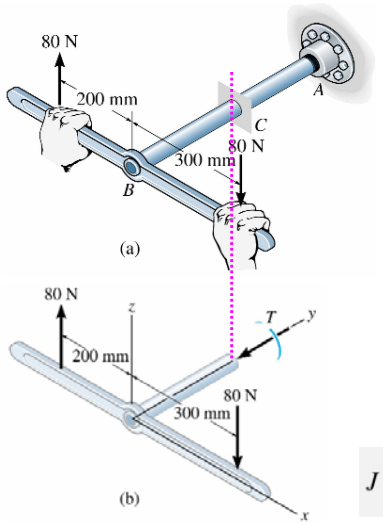
ที่จุด B

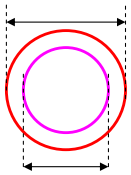
$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{1250\ \text{kN·mm} \times 15\ \text{mm}}{4.97 \times 10^7\ \text{mm}^4}$$

$$= 0.377\ \text{MPa}$$

Example

ท่อเหล็กกลวงมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายในและภายนอก 80 mm และ 100 mm จงหาหน่วยแรงเฉือนที่เกิดขึ้นที่ผิวด้านในและด้านนอกของท่อ





หาแรงบิดภายในที่หน้าตัด C

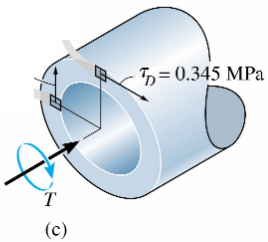
$$\Sigma M_y = 0;$$

$$80\ \text{N}(0.3\ \text{m}) + 80\ \text{N}(0.2\ \text{m}) - T = 0$$

$$T = 40\ \text{N} \cdot \text{m}$$

Polar moment of inertia ของเพลา

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.05\ \text{m})^4 - (0.04\ \text{m})^4] = 5.80(10^{-6})\ \text{m}^4$$

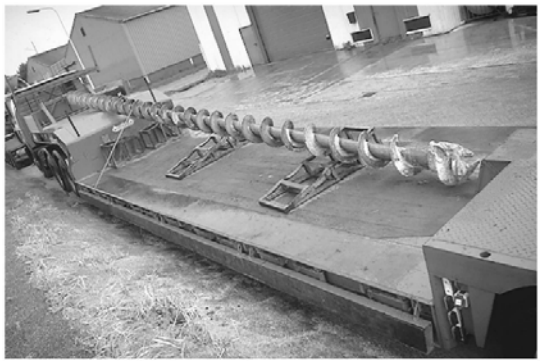


ที่จุด D

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40\ \text{N} \cdot \text{m}(0.05\ \text{m})}{5.80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.345\ \text{MPa}$$

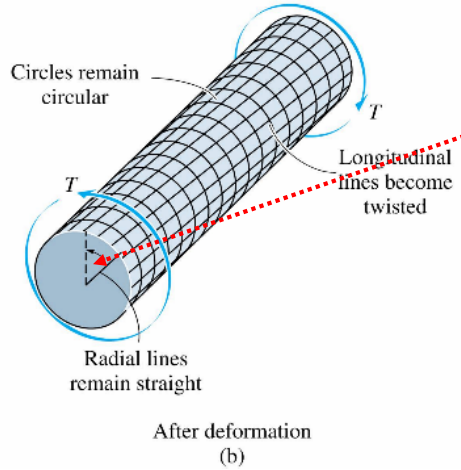
ที่จุด E

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40\ \text{N} \cdot \text{m}(0.04\ \text{m})}{5.80(10^{-6})\ \text{m}^4} = 0.276\ \text{MPa}$$



5.3 มุมบิด (angle of twist)

- เพลาทำด้วยวัสดุแบบ homogeneous และ isotropic
- วัสดุที่ทำเพลามีพฤติกรรมแบบ linear elastic ภายใต้แรงบิด
- ไม่พิจารณา localized deformation

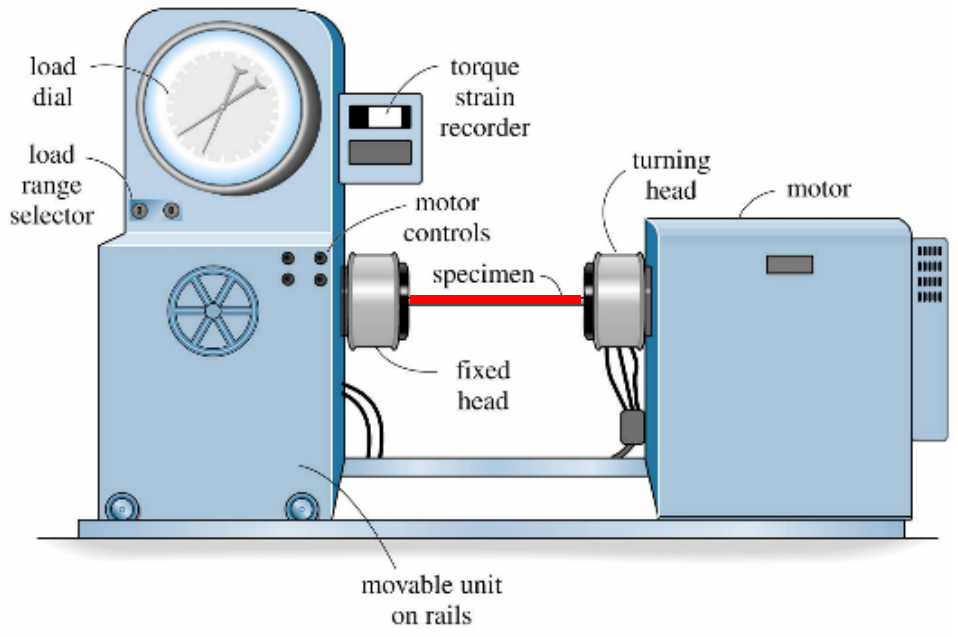


$$\phi = \int_0^L \frac{T}{JG}\,dx = \frac{TL}{GJ}$$

polar moment of inertia ของพื้นที่หน้าตัด, J

$$J = \frac{\pi}{2}c^4 \qquad J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4)$$

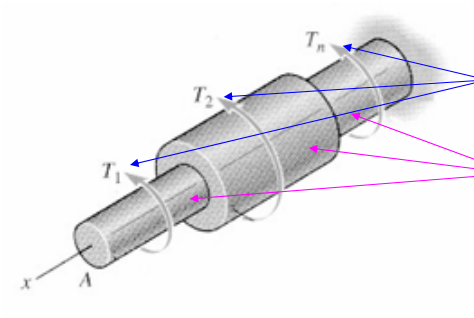
G = shear modulus of elasticity หาได้จากการทดสอบการบิด



คุณสมบัติทางกลของวัสดุ

Material	γ	E	G	Yield Strength, σ_y			Ultimate Strength, σ_u				ν	α
Units	$\frac{kN}{m^3}$	GPa	GPa	MPa			MPa			%		$\frac{10^{-6}}{°C}$
	Weight density	Modulus of elasticity	Shearing Modulus	Tens.	Comp.	Shear	Tens.	Comp.	Shear	Elongation in 2 in. specimen	Poisson's ratio	Coeff. of thermal expansion
Aluminum alloys												
2014-T6	27.9	73.1	27	414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
6061-T6	27.1	68.9	26	255	255	131	290	290	186	12	0.35	24
Gray Cast iron												
ASTM 20	71.9	67.0	27	-	-	-	179	669	-	0.6	0.28	12
Concrete (comp.)												
Low strength	23.8	22.1	-	-	-	12	-	-	-	-	0.15	11
High strength	23.8	29.0	-	-	-	38	-	-	-	-	0.15	11
Steel												
A36	78.5	200	75	250	250	-	400	400	-	30	0.32	12
Stainless 304	78.6	193	75	207	207	-	517	517	-	40	0.27	17
Wood (bending)												
Douglas Fir	4.7-5.5	11-13	-	30-50			50-80			-	-	-
Oak	6.3-7.1	11-12	-	40-60			50-100			-	-	-
Pine	5.5-6.3	11-14	-	40-60			50-100			-	-	-

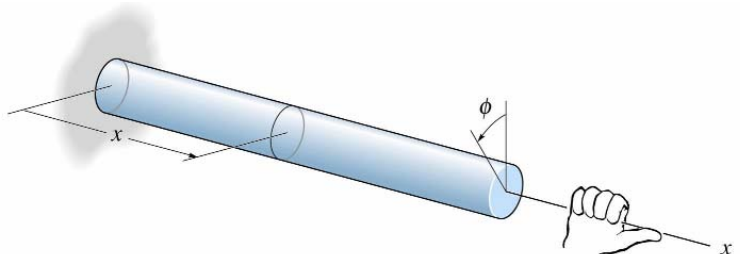
Constant Torque and Cross-Sectional Area

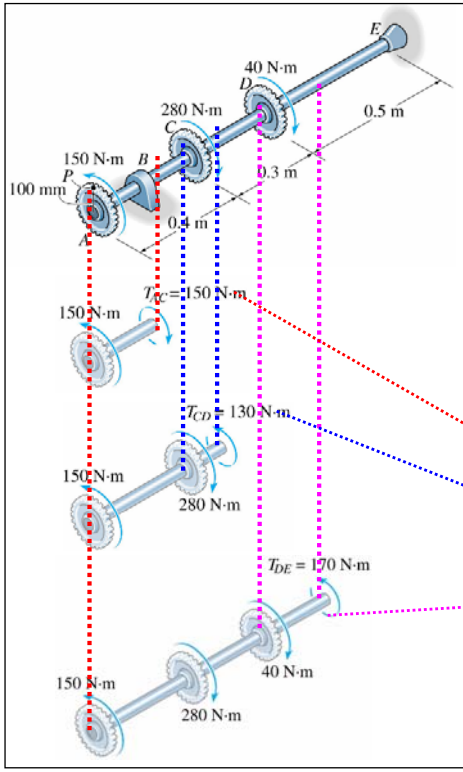


ในกรณีที่เพลาถูกกระทำโดยแรงบิดหลายแรงบิดตลอดความยาวของเพลา หรือพื้นที่หน้าตัดหรือวัสดุที่ใช้ทำเพลามีการเปลี่ยนแปลงจากส่วนหนึ่งของเพลาไปยังอีกส่วนหนึ่งแล้ว

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

Sign Convention

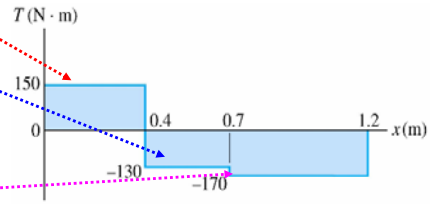




Example

เมื่อ gear ของเพลาถูกกระทำโดยแรงบิด จงหาค่าการเปลี่ยนตำแหน่งที่เกิดที่จุด P ของ gear A เมื่อเพลามีเส้นผ่านศูนย์กลาง 14 mm และ $G = 80$ GPa

เขียน FBD เพื่อหา torque diagram



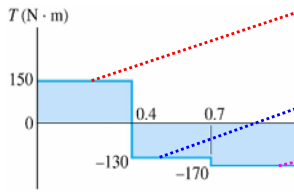
Polar moment of inertia ของเพลา

$$J = \frac{\pi}{2}(0.007\text{ m})^4 = 3.77(10^{-9})\text{ m}^4$$

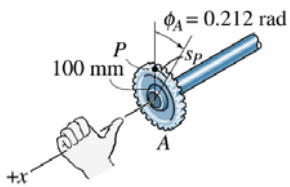
มุมบิด

$$\phi_A = \sum \frac{TL}{JG} = \frac{(+150\text{ N}\cdot\text{m})(0.4\text{ m})}{3.77(10^{-9})\text{ m}^4[80(10^9)\text{ N/m}^2]} + \frac{(-130\text{ N}\cdot\text{m})(0.3\text{ m})}{3.77(10^{-9})\text{ m}^4[80(10^9)\text{ N/m}^2)]} + \frac{(-170\text{ N}\cdot\text{m})(0.5\text{ m})}{3.77(10^{-9})\text{ m}^4[80(10^9)\text{ N/m}^2)]}$$

$$= -0.212\text{ rad}$$



พุ่งเข้าหรือพุ่งออก???

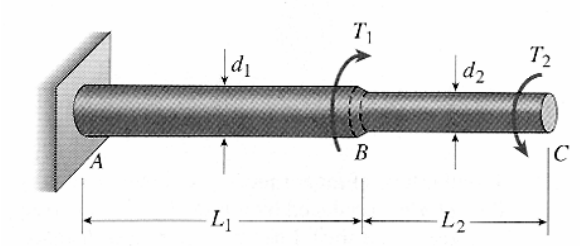


ระยะที่ฟันเฟือง P เกิดการเปลี่ยนตำแหน่ง

$$s_P = \phi_A r = (0.212\text{ rad})(100\text{ mm}) = 21.2\text{ mm}$$

Absolute Maximum Torsional Stress

- เพลาถูกกระทำโดยแรงบิดภายนอกหลายๆ ค่า
- รัศมีของเพลามีการเปลี่ยนแปลงตามความยาวของเพลา

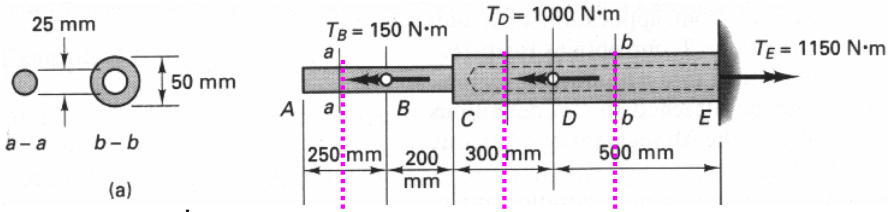


ขั้นตอนการคำนวณ

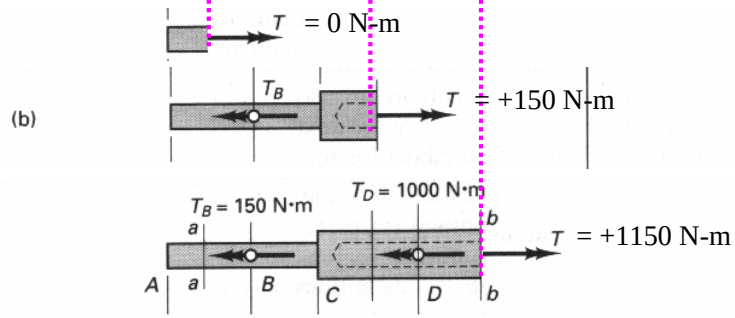
1. เขียน torque diagram โดยให้แรงบิดภายในเป็น "+" เมื่อมีทิศทางพุ่งออกจากหน้าตัดของเพลาโดยใช้กฎมือขวา
2. หาค่า absolute maximum ของหน่วยแรงเฉือนและตำแหน่งที่เกิด

ตัวอย่างที่ 5-2

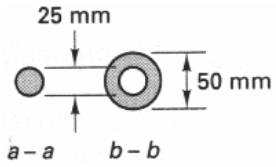
เพลาเหล็กถูกยึดแน่นกับผนังที่จุด E ถ้า $G = 80$ GPa จงหาค่าหน่วยแรงเฉือนและมุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลา

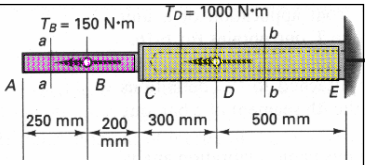


เขียน FBD เพื่อหา torque diagram



ค่า polar moment of inertia

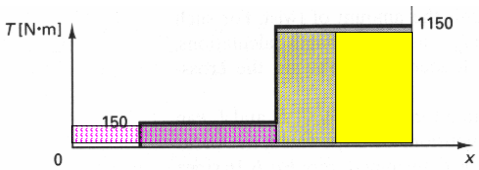




$$J_{AB} = J_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(25)^4}{32} = 38.3(10^3)\ \text{mm}^4$$

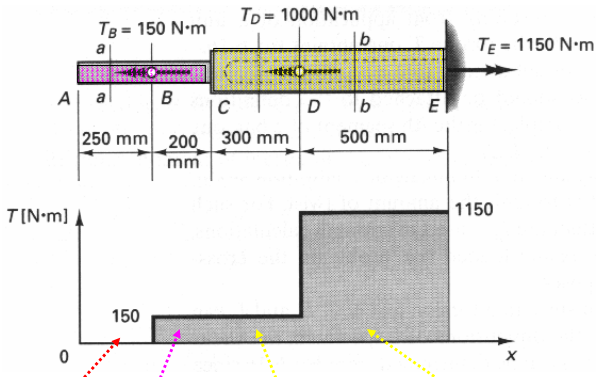
$$J_{CD} = J_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575(10^3)\ \text{mm}^4$$

จาก torque diagram ของเพลา



$$\tau_{BC} = \frac{150(25/2)10^{-3}}{38.3(10^3)(10^{-12})} = 48.96\ \text{MPa}$$

$$\tau_{DE} = \frac{1150(50/2)10^{-3}}{575(10^3)(10^{-12})} = 50\ \text{MPa}$$



$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ_{AB}} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{GJ_{BC}} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{GJ_{CD}} + \frac{T_{DE}L_{DE}}{GJ_{DE}}$$

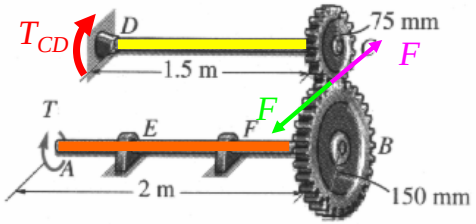
$$\phi = 0 + \frac{150(10^3)200}{38.3(10^3)80(10^3)} + \frac{150(10^3)300}{575(10^3)80(10^3)} + \frac{1150(10^3)500}{575(10^3)80(10^3)}$$

$$= 23.3(10^{-3})\ \text{rad}$$

ซึ่งมีทิศทางเป็นบวก ⟵

ตัวอย่างที่ 5-3

เพลาเหล็กตัน 2 ท่อนมี dia. 20 mm จงหาค่าแรงบิดสูงสุดที่ระบบสามารถรองรับได้ เมื่อมุมบิดสูงสุดมีค่าได้ไม่เกิน 0.10 rad และ $G = 80$ GPa



$$J_{AB} = J_{CD} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$= \frac{\pi(0.020)^4}{32} = 15.708(10^{-9})\ \text{m}^4$$

แรงบิดที่เกิดขึ้นภายใน

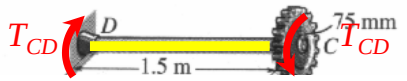
แรงบิดในเพลา AB คือ T ทำให้เกิดแรงกระทำต่อฟันเฟืองของเฟือง B

$$F = \frac{T}{0.15}$$

ซึ่งกระทำต่อฟันเฟืองของเฟือง C และทำให้เกิดแรงบิดบนเพลา CD

$$T_{CD} = F(0.075) = 0.5T$$

หามุมบิดสูงสุดที่เกิดขึ้น



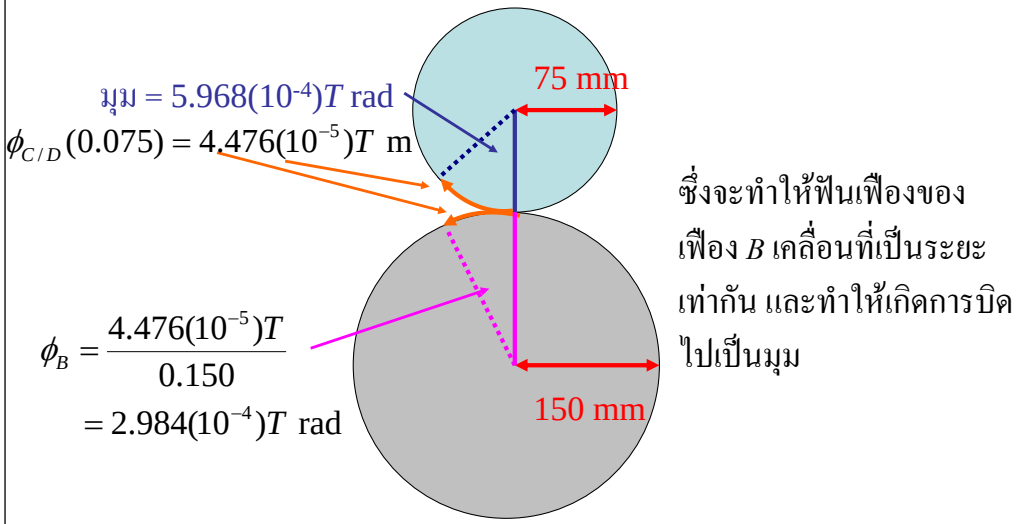
มุมบิดที่เกิดขึ้นที่เฟือง C เทียบกับจุดยึดแน่น D ในเพลา CD มีค่า

$$\phi_{C/D} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GJ}$$

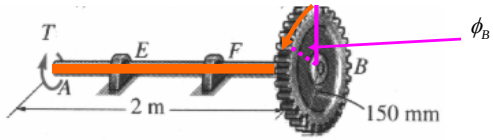
$$= \frac{0.5T(1.5)}{80(10^9)15.708(10^{-9})}$$

$$= 5.968(10^{-4})T\ \text{rad}$$

เมื่อเฟือง C บิดไปเป็นมุมข้างต้น ฟันเฟืองของเฟือง C เคลื่อนที่เป็น<u>ระยะ</u>



ซึ่งจะทำให้ฟันเฟืองของเฟือง B เคลื่อนที่เป็นระยะเท่ากัน และทำให้เกิดการบิดไปเป็นมุม



$$\phi_B = \frac{4.476(10^{-5})T}{0.150}$$

$$= 2.984(10^{-4})T\ \text{rad}$$

ดังนั้น มุมบิดที่เกิดขึ้นระหว่างปลาย A ในเพลา AB เทียบกับจุดยึดแน่น D มีค่าเท่ากับ

$$\phi_{A/D} = \phi_B + \frac{TL_{AB}}{GJ}$$

$$= 2.984(10^{-4})T + \frac{T(2)}{80(10^9)15.708(10^{-9})} = 1.890(10^{-3})T\ \text{rad}$$

เนื่องจากมุมบิดสูงสุดมีค่าได้ไม่เกิน 0.10 radian

$$T_{\max} = \frac{0.1}{1.89(10^{-3})} = 52.9\ \text{N-m}$$

หาค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในเพลา

$$T_{\max} = T_{AB} = 52.9 \text{ N-m}$$

$$T_{CD} = 0.5T_{AB} = 26.45 \text{ N-m}$$

เนื่องจากเพลาเหล็กตันทั้ง 2 ท่อนและมี diameter เท่ากัน ดังนั้น ค่าหน่วยแรงเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นในส่วน AB ของเพลา

$$\tau_{AB} = \frac{52.9(0.010)}{15.708(10^{-9})} = 33.68 \text{ MPa} < \tau_Y = 100 \text{ MPa}$$