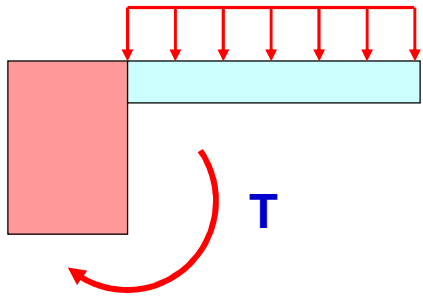


# 16

## Reinforced Concrete Design

### Torsion 2



- Thin-walled Tube
- Combined Shear & Torsion
- Space Truss Analogy
- Torsion Design by ACI318
- Compatibility Torsion

Mongkol JIRAVACHARADET

SURANAREE

INSTITUTE OF ENGINEERING

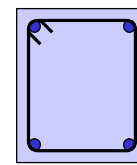
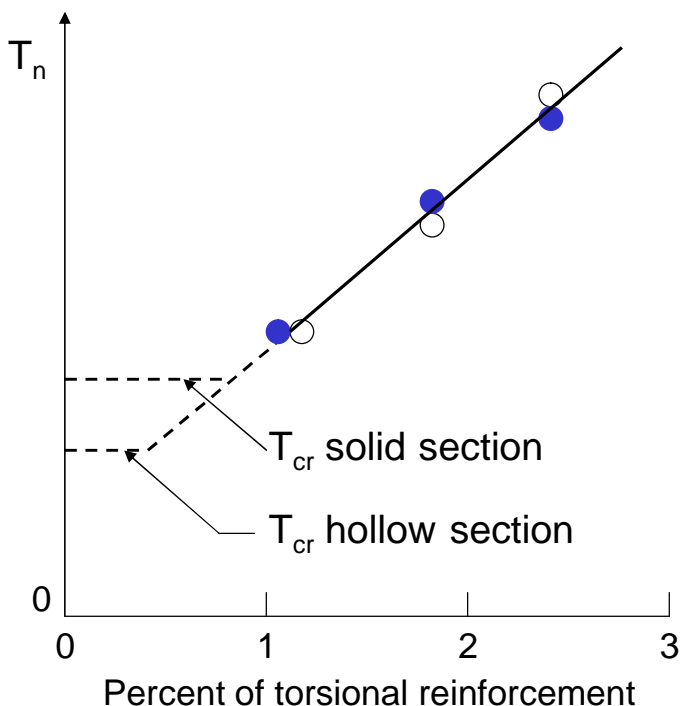
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING

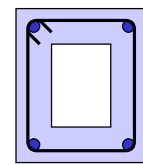
## Torsional Strength of Reinforced Concrete

SDM

เปรียบเทียบกำลังบิดของหน้าตัดสี่เหลี่ยมตันและกลวงที่มีขนาดเท่ากันตามปริมาณเหล็กเสริมตามยาวและเหล็กปลอกที่เปลี่ยนแปลงไป



● Solid



○ Hollow

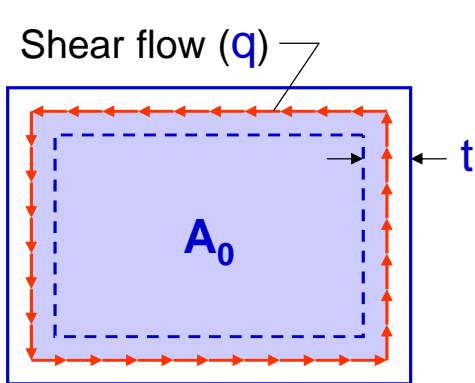
แม้ว่าโมเมนต์บิดแตกตัวของหน้าตัดกลวงจะต่ำกว่า กำลังบิดประลัยของหน้าตัดตันและกลวงมีค่าเท่ากันที่ขนาดและปริมาณเหล็กเสริมเท่ากัน

ดังนั้นกำลังต้านทานการบิดจึงมาจากขอบนอกของหน้าตัดที่มีเหล็กเสริม

# Shear Stress in Thin-walled Tube

SDM

คานรับแรงบิดจะถูกคิดว่าเป็นท่อผนังบางโดยเฉลี่ยแกนกลางคอนกรีต



$$\text{Shear flow: } q = \frac{T}{2A_0} \text{ kg/cm}$$

มีค่าคงที่บนเส้นรอบรูปที่กลางความหนาผนังท่อ  
หน่วยแรงเฉือนจากการบิด  $\tau_t = q/t$  :

$$\tau_t = \frac{T}{2A_0 t}$$

## Cracking Torque ( $T_{cr}$ )

การแตกร้าวเกิดขึ้นเมื่อ  $\tau$  มีค่าถึง  $1.06\sqrt{f'_c}$   $\rightarrow \tau_{cr} = \frac{T_{cr}}{2A_0 t} = 1.06\sqrt{f'_c}$

ดังนั้น โมเมนต์บิดแตกร้าว  $T_{cr} = 1.06\sqrt{f'_c}(2A_0 t)$

ACI กำหนดให้แทนค่าความหนาผนังท่อบาง  $t = 0.75A_{cp}/p_{cp}$  และ

SDM

พื้นที่ล้อมรอบ  $A_0 = 2A_{cp}/3$  เมื่อ

$p_{cp}$  คือเส้นรอบรูปภายนอกของหน้าตัดคอนกรีต

$A_{cp}$  คือพื้นที่ซึ่งล้อมรอบโดย  $p_{cp}$

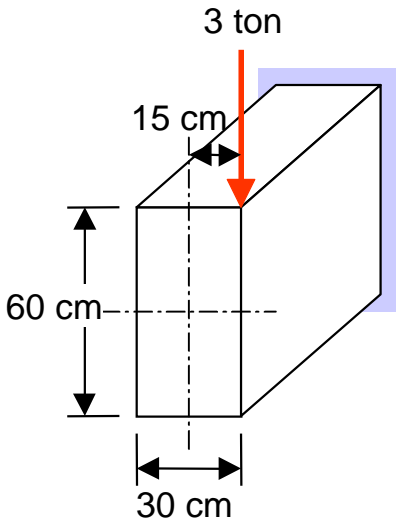
ดังนั้น โมเมนต์บิดแตกร้าว  $T_{cr} = 1.06\sqrt{f'_c} \left( 2 \times \frac{2A_{cp}}{3} \times \frac{0.75A_{cp}}{p_{cp}} \right)$

$$T_{cr} = 1.06\sqrt{f'_c} \left( \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$$

ไม่ต้องคิดผลของการบิดเมื่อ  $T_u \leq \phi T_{cr} / 4 \leq \phi (0.265\sqrt{f'_c}) \left( \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$

ตัวคูณลดกำลังสำหรับการบิด  $\phi = 0.85$

**ตัวอย่างที่ 7.1** คานยื่นรับน้ำหนักบรรทุกทุกประลัย 3 ตันที่มุมหน้าตัดห่างจาก ศูนย์กลางหน้าตัด 15 ซม. ตรวจสอบดูว่าจำเป็นต้องคิดผลของการบิดในการออกแบบ หรือไม่ กำหนด  $f'_c = 240$  กก./ซม.<sup>2</sup>



เส้นรอบรูปหน้าตัด  $p_{cp} = 2(60+30) = 180$  ซม.

พื้นที่หน้าตัด  $A_{cp} = (60)(30) = 1,800$  ซม.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \text{ขีดจำกัดโมเมนต์บิด } \phi T_{cr}/4 &= \phi(0.265\sqrt{f'_c})\left(\frac{A_{cp}^2}{p_{cp}}\right) \\ &= 0.85 \times 0.265\sqrt{240} \times \left(\frac{1800^2}{180}\right) \\ &= 62,812 \text{ กก.-ซม.} = 0.63 \text{ ตัน-เมตร} \end{aligned}$$

โมเมนต์บิดที่มากกระทำ  $T_u = (3)(0.15) = 0.45$  ตัน-เมตร  $< 0.63$  ตัน-เมตร

**OK**

ดังนั้นไม่ต้องคิดผลของแรงบิดในคาน

## Combined Shear and Torsion

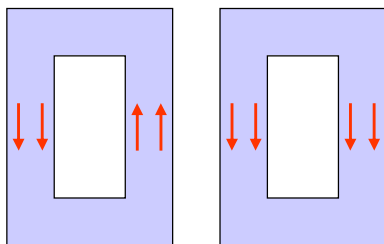
หน่วยแรงเฉือนจากการเฉือน:  $\tau_v = \frac{V}{b_w d}$

หน่วยแรงเฉือนจากการบิด:  $\tau_t = \frac{T}{2A_0 t}$

เมื่อ  $t = 0.75A_{cp}/p_{cp}$   
และ  $A_0 = 2A_{cp}/3$

หน่วยแรงเฉือนรวมกระทำ:

**Hollow section**

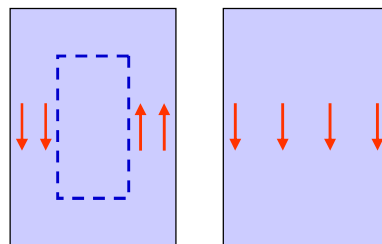


Torsional stresses

Shear stresses

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}$$

**Solid section**



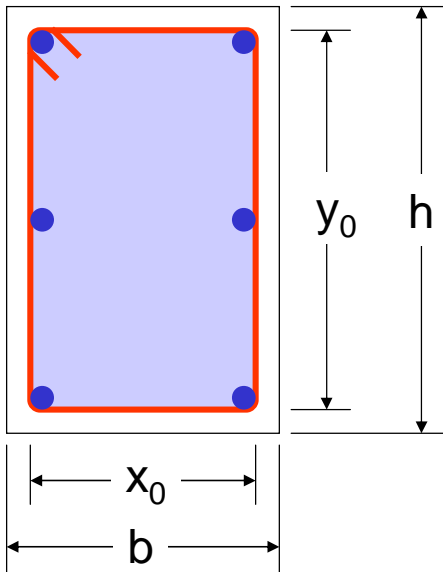
Torsional stresses

Shear stresses

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2}$$

# Torsional Geometric Parameters

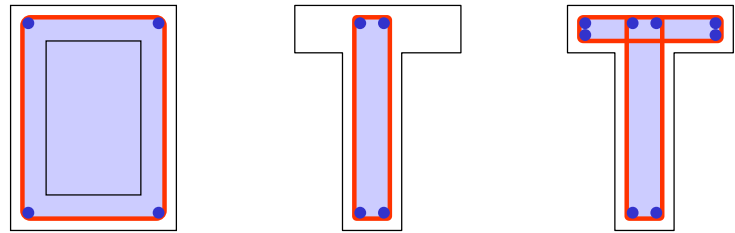
SDM



Gross area  $A_{oh} = x_0 y_0$

Shear perimeter  $p_h = 2(x_0 + y_0)$

$x_0, y_0$  = Distance from center to center of stirrup



สำหรับหน้าตัดกลวง ถ้าผนังหนาไม่เท่ากันให้ใช้ค่าที่ทำให้หน่วยแรงมากที่สุด และถ้าผนังมีความหนา  $t < A_{oh}/p_h$  ให้หน่วยแรงเฉือนจากการบิดเป็น

$$\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \longrightarrow \frac{T_u}{1.7 A_{oh} t}$$

# Maximum Shear + Torsion Stress

SDM

หน้าตัดต้องมีขนาดเพียงพอที่จะทำให้หน่วยแรงเฉือนร่วมกระทำมีค่าไม่เกินขีดจำกัด

(a) For solid sections

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2}\right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2.12 \sqrt{f'_c}\right)$$

(b) For hollow sections

$$\frac{V_u}{b_w d} + \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2.12 \sqrt{f'_c}\right)$$

For reinforced concrete  $V_c = 0.53 \sqrt{f'_c}$

# Torsional Crack

การแตกร้าวจากการบิดมีลักษณะเป็นแผ่นเอียง

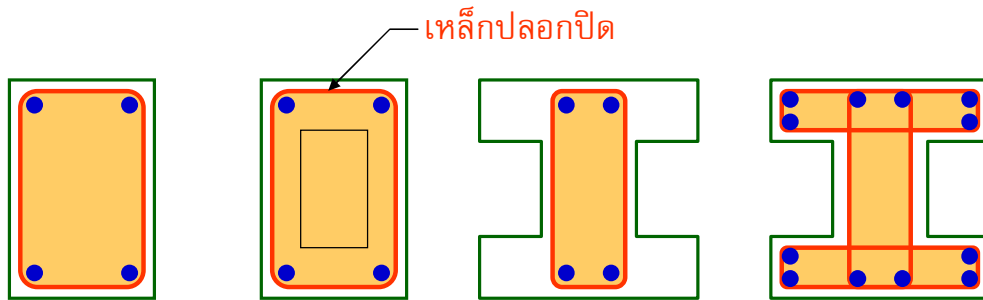
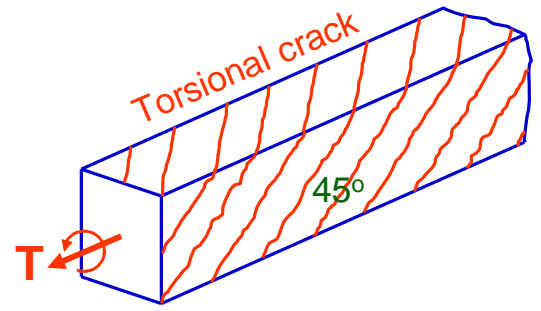
สมมุติว่าคอนกรีตไม่รับแรงดึงและเหล็กเสริมคราก

กำลังต้านทานการบิดส่วนใหญ่มาจากเหล็กปลอกปิด

เหล็กเสริมตามยาว และแผ่นคอนกรีตเอียงรับแรงอัด

คอนกรีตนอกเหล็กปลอกไม่ค่อยมีผลต่อการบิด ดังนั้นหลังการแตกร้าวจะใช้พื้นที่

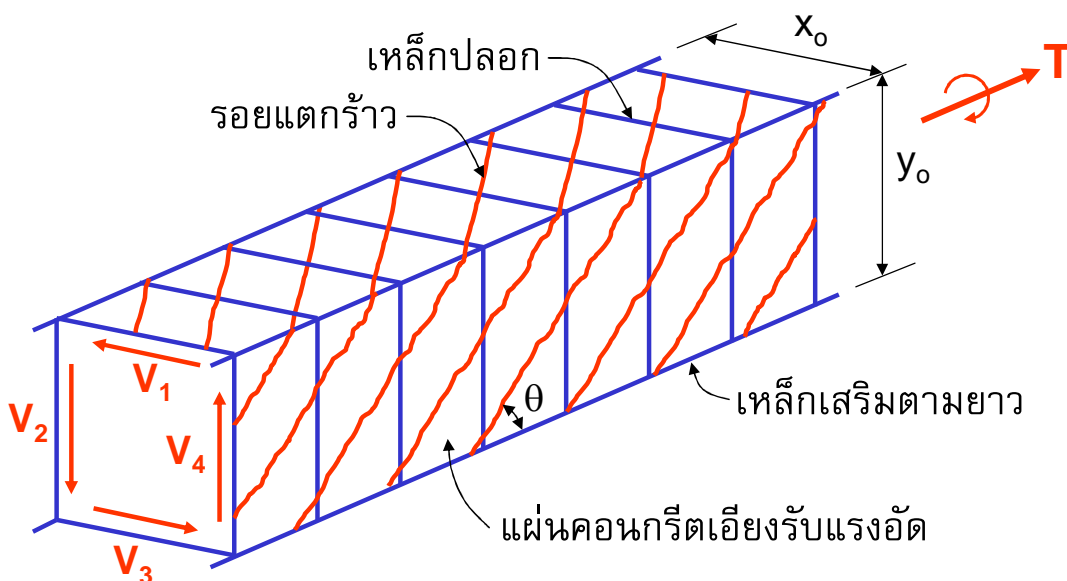
$A_{oh}$  ซึ่งถูกล้อมรอบโดยเหล็กปลอก



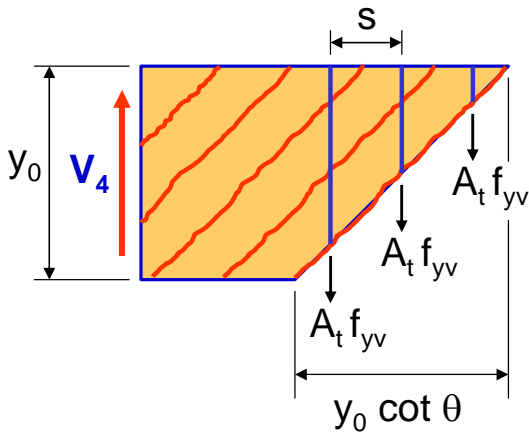
$A_{oh} =$  พื้นที่แรงเงา

# Space Truss Analogy

การไหลเฉือน  $q$  ในผนังท่อจะถูกแบ่งออกเป็นแรงเฉือน  $V_1$   $V_2$   $V_3$  และ  $V_4$  บนแต่ละด้านของโครงถักสามมิติดังในรูป



## พิจารณาแรงเฉือนบนด้านหนึ่ง: $V_4$

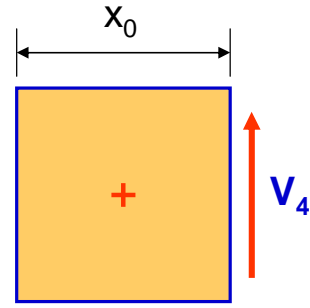


แรงเฉือน  $V_4 = n A_t f_{yv}$

จำนวนปลอกในระนาบเฉือน:

$$n = \frac{y_0 \cot 45^\circ}{s} = \frac{y_0}{s}$$

$$V_4 = \frac{A_t f_{yv} y_0}{s}$$



โมเมนต์บิดจากแรงเฉือน  $V_4$  :

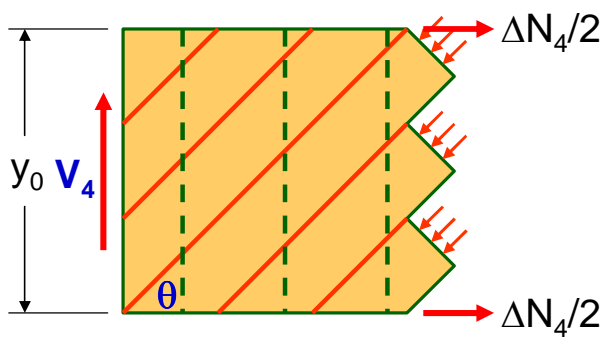
$$T_4 = \frac{V_4 x_0}{2}$$

$$T_4 = \frac{A_t f_{yv} x_0 y_0}{2s} = T_1 = T_2 = T_3$$

โมเมนต์บิดทั้งหมด :  $T_n = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$T_n = \frac{2 A_t f_{yv} x_0 y_0}{s} = \frac{2 A_t f_{yv} A_{oh}}{s}$$

## พิจารณาแรงในแผ่นแรงอัดเอียง

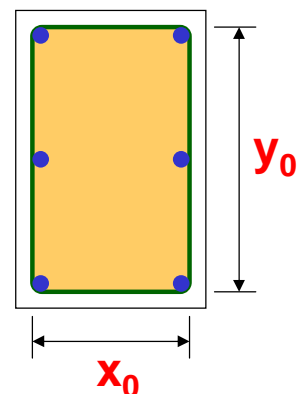
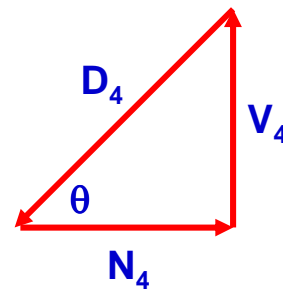


แรงดึงในเหล็กเสริมตามยาว:  $\Delta N_4 = V_4 \cot \theta$

$$\Delta N_4 = \frac{A_t f_{yv} y_0}{s} = \Delta N_2$$

$$\Delta N_1 = \Delta N_3 = \frac{A_t f_{yv} x_0}{s}$$

แรงดึงทั้งหมด:  $\Delta N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \Delta N_3 + \Delta N_4$



$$A_s f_{ye} = \frac{A_t f_{yv}}{s} 2(x_0 + y_0) = \frac{A_t f_{yv} p_h}{s} \rightarrow \text{perimeter of stirrup } 2(x_0 + y_0)$$

# Torsion Design by ACI318-08

SDM

- ▶ เมื่อโมเมนต์บิด  $T_u$  มีค่าเกิน  $\phi T_{cr}/4$  ให้ออกแบบรับโมเมนต์บิดเพื่อให้

$$\phi T_n \geq T_u$$

ในการคำนวณ  $T_n$  โมเมนต์บิดทั้งหมดจะถูกรับโดย เหล็กปลอกและเหล็กเสริมตามยาว โดยให้  $T_c = 0$

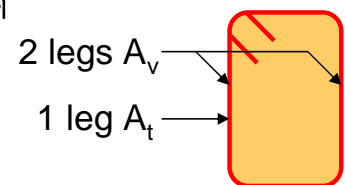
- ▶ ปริมาณเหล็กปลอกคำนวณโดย  $T_n = \frac{2A_0 A_t f_{yv}}{s}$  เมื่อ  $A_0 = 0.85A_{oh}$

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_n}{2A_0 f_{yv}} = \frac{T_u}{2\phi A_0 f_{yv}}$$

- ▶ พื้นที่เหล็กเสริมตามยาวที่ต้องใส่เพิ่มขึ้นเพื่อด้านทานการบิด  $A_\ell = \frac{A_t}{s} p_h \left( \frac{f_{yv}}{f_{y\ell}} \right)$

- ▶ ปริมาณเหล็กปลอกที่ต้องการสำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์บิด

$$\text{Total} \left( \frac{A_{v+t}}{s} \right) = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s}$$



# Minimum Torsion Reinforcement

SDM

- ▶ ปริมาณเหล็กปลอกน้อยที่สุด  $(A_v + 2A_t) = 0.199 \sqrt{f'_c} \frac{b_w s}{f_{yv}} \geq 3.5 \frac{b_w s}{f_{yv}}$

- ▶ ระยะห่างเหล็กปลอกมีค่าไม่เกินค่าที่น้อยกว่าของ  $p_h/8$  หรือ 30 ซม.

- ▶ พื้นที่เหล็กเสริมตามยาวน้อยที่สุด  $A_{\ell, \min} = \frac{1.33 \sqrt{f'_c}}{f_{y\ell}} A_{cp} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{y\ell}}$

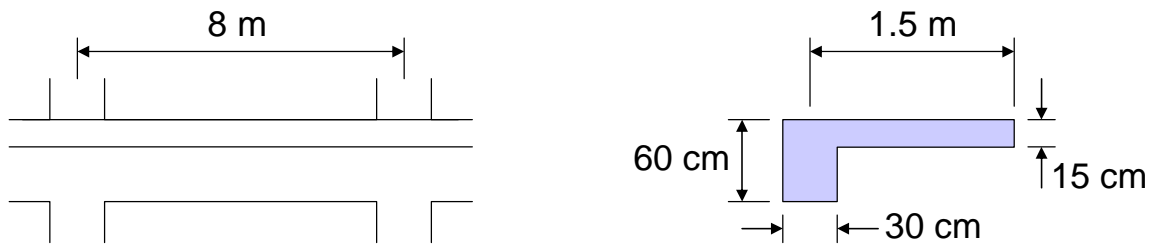
โดยที่  $A_t/s$  จะต้องไม่น้อยกว่า  $1.8 b_w/f_{yv}$

→ เสริมเหล็กตามยาวรับการบิดกระจายโดยรอบภายในเหล็กปลอก โดยมีระยะห่างมากที่สุด 30 ซม.

→ เสริมเหล็กตามยาวอย่างน้อยหนึ่งเส้นที่แต่ละมุมของเหล็กปลอก

→ ใช้เหล็กเสริมตามยาว  $\phi \geq 1/24$  เท่าระยะห่างเหล็กปลอก  $\geq 10$  ม.ม.

**Example 14-1:** The 8-m span beam carries a cantilever slab 1.5 m. The beam supports a live load of 1.2 t/m along the beam centerline plus 200 kg/m<sup>2</sup> over the slab surface. The effective depth of beam is 54 cm, and the distance from the surface to the stirrup is 4 cm.  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ ,  $f_y = 4,000 \text{ kg/cm}^2$



### Load from slab:

$$w_u = 1.4(0.15)(2,400)(1.5) + 1.7(200)(1.5) = 1,266 \text{ kg/m}$$

$$\text{Eccentricity} = 1.5/2 = 0.75 \text{ m}$$

### Load from beam:

$$w_u = 1.4(0.6)(0.3)(2,400) + 1.7(1,200) = 2,645 \text{ kg/m}$$

แรงเฉือนประลัย:  $V_u = \frac{w_u L}{2} = \frac{(1,266 + 2,645)(8.0)}{2} / 1,000 = 15.6 \text{ ton}$

โมเมนต์บิดประลัย:  $T_u = \frac{w_{tu} L}{2} = \frac{1,266 \times 0.75 \times 8.0}{2} / 1,000 = 3.80 \text{ t-m}$

โมเมนต์บิดประลัย:  $M_u = \frac{w^2 L}{10} = \frac{(1,266 + 2,645)(8.0)^2}{10 \times 1,000} = 25.0 \text{ t-m}$

## Flexural Design

$$R_n = \frac{M_u}{\phi b d^2} = \frac{25(1,000)(100)}{0.9(30)(54)^2} = 31.8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho_{\min} = 0.0035, \quad \rho_{\max} = 0.0229$$

$$\rho = \frac{0.85f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2R_n}{0.85f'_c}} \right) = 0.0086 \quad \text{OK}$$

$$A_{l,\text{flexure}} = \rho b d = 0.0086(30)(54) = 13.9 \text{ cm}^2$$



## Shear Design

$$V_c = 0.53\sqrt{280} \times 30 \times 54 / 1,000 = 14.37 \text{ ton}$$

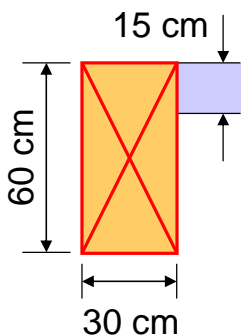
$$V_u / \phi = 15.6 / 0.85 = 18.35 \text{ ton}$$

$$V_s = V_u / \phi - V_c = 18.35 - 14.37 = \mathbf{3.98 \text{ ton}}$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y d} = \frac{3.98}{4.0 \times 54} = \mathbf{0.0184 \text{ cm}^2 / \text{cm} / \text{two legs}}$$

## Cracking Torque

$$A_{cp} = 30 \times 60 = 1,800 \text{ cm}^2 \quad p_{cp} = 2(30 + 60) = 180 \text{ cm}$$



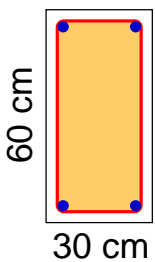
$$\phi T_{cr} / 4 = \phi (0.265 \sqrt{f'_c}) \left( \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \right)$$

$$= 0.85 \times 0.265 \sqrt{280} \times \frac{1,800^2}{180}$$

$$= 67,845 \text{ kg-cm} = \mathbf{0.68 \text{ t-m}} < T_u = \mathbf{3.80 \text{ t-m}}$$

∴ ต้องออกแบบเหล็กเสริมรับโมเมนต์บิด

## Torsional Geometric Parameters



$$b_w d = (30)(54) = 1,620 \text{ cm}^2$$

$$A_{oh} = x_o y_o = (22)(52) = 1,144 \text{ cm}^2$$

$$x_o = 30 - 2(4) = 22 \text{ cm}$$

$$A_o = 0.85(1,144) = 972.4 \text{ cm}^2$$

$$y_o = 60 - 2(4) = 52 \text{ cm}$$

$$p_h = 2(22+52) = 148 \text{ cm}$$

## Check adequacy of section

ตรวจสอบดูว่าหน้าตัดมีขนาดใหญ่เพียงพอหรือไม่?

$$\sqrt{\left( \frac{V_u}{b_w d} \right)^2 + \left( \frac{T_u p_h}{1.7 A_{oh}^2} \right)^2} \leq \phi \left( \frac{V_c}{b_w d} + 2.12 \sqrt{f'_c} \right)$$

$$\sqrt{\left( \frac{15.6}{30 \times 54} \right)^2 + \left( \frac{3.80 \times 100 \times 148}{1.7 \times 1,144^2} \right)^2} \leq 0.85 (0.53 + 2.12) \sqrt{280} / 1,000$$

$\mathbf{0.0271 \text{ t/cm}^2} < \mathbf{0.0377 \text{ t/cm}^2} \rightarrow$  หน้าตัดมีขนาดใหญ่พอ

## Torsional reinforcement

$$\frac{A_t}{s} = \frac{T_u}{2\phi A_0 f_{yv}} = \frac{3.80 \times 100}{2 \times 0.85 \times 972.4 \times 4.0} = \mathbf{0.0575} \text{ cm}^2 / \text{cm} / \text{one leg}$$

## Combined shear & torsion stirrup

$$\text{Total} \left( \frac{A_{v+t}}{s} \right) = \frac{A_v}{s} + 2 \frac{A_t}{s} = 0.0184 + 2 \times 0.0575 = \mathbf{0.1334} \text{ cm}^2 / \text{cm} \\ \text{two legs}$$

เลือกเหล็กปลอกปิด **DB12** (พื้นที่สองขา  $2(1.13) = 2.26 \text{ ซม.}^2$ )

ระยะห่างเหล็กปลอกที่ต้องการ  $s = 2.26 / 0.1334 = 16.9 \text{ cm}$

ระยะห่างเหล็กปลอกมากที่สุด  $s_{\max} = p_h / 8 = 148 / 8 = 18.5 \text{ cm} < 30 \text{ cm}$

**Use closed stirrup DB12 @ 0.16 m** ( $A_{v+t}/s = 2.26/16 = \mathbf{0.141} \text{ cm}^2 / \text{cm}$ )

## Minimum torsion reinforcement

$$\min \frac{A_{v+t}}{s} = 0.199 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_y} \geq \mathbf{3.5 \frac{b_w}{f_y}} \rightarrow \boxed{f'_c > 309 \text{ ksc control}}$$
$$= 3.5 \times \frac{30}{4,000} = 0.0263 \text{ cm}^2 / \text{cm} < (A_{v+t}/s = \mathbf{0.141} \text{ cm}^2 / \text{cm}) \quad \boxed{\text{OK}}$$

## Torsion longitudinal steel

$$A_\ell = \frac{A_t}{s} p_h \left( \frac{f_{yv}}{f_{y\ell}} \right) = 0.0575 \times 148 = \mathbf{8.51} \text{ cm}^2$$

$$A_{\ell, \min} = \frac{1.33 \sqrt{f'_c}}{f_{y\ell}} A_{cp} - \frac{A_t}{s} p_h \frac{f_{yv}}{f_{y\ell}} = \frac{1.33 \sqrt{280}}{4,000} \times 1,800 - 8.51 = \mathbf{1.51} \text{ cm}^2$$

$$\left[ \frac{A_t}{s} = 0.0575 \right] > \left[ 1.8 \frac{b_w}{f_{yv}} = 1.8 \frac{30}{4,000} = 0.0135 \right] \quad \boxed{\text{OK}}$$

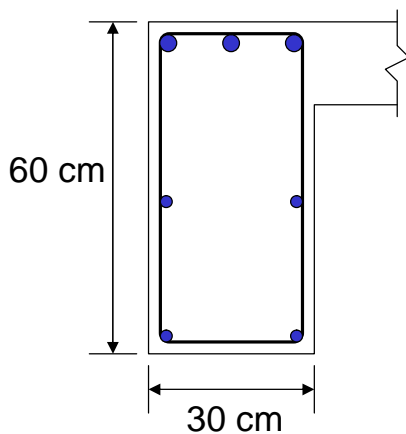
## Total Longitudinal Steel

Bending:  $A_t = 13.9 \text{ cm}^2$  (Top reinforcement)

Torsion:  $A_t = 8.51 \text{ cm}^2$  (Distributed along perimeter)

To satisfy 30 cm max. spacing of  $A_t$

**Provide 4DB16 in the bottom half of beam**



and add  $8.51 - 4(2.01) = 0.47 \text{ cm}^2$  to flexural steel

Steel area required at top =  $13.9 + 0.47 = 14.37 \text{ cm}^2$

**USE TOP 3DB25 ( $A_s = 14.73 \text{ cm}^2$ )**

**At midspan:**

$$M_u = \frac{w^2 L}{14} = \frac{(1,266 + 2,645)(8.0)^2}{14 \times 1,000} = 17.87 \text{ t-m}$$

Required  $A_s = 9.68 \text{ cm}^2$  (2DB25)

**Section @ Supports**

