บทที่ 3
จลนศาสตร์และสมการของของไหล

จลนศาสตร์ (Kinematics) เป็นแขนงวิชากลศาสตร์ที่กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของสสาร โดยไม่พิจารณาสาเหตุของการเคลื่อนที่ที่เกิดจากแรงมากระทำ ณ ที่นี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่อันประกอบด้วย การเปลี่ยนตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่ง สำหรับการเคลื่อนที่ในทางชลศาสตร์หรือเรียกว่า การไหล (Flow) ซึ่งสามารถอธิบายการไหลโดยระบุสภาพของการไหลได้หลายวิธี เช่น การไหลแบบราบเรียบ (Laminar flow) หรือการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent flow) การไหลแบบคงตัว (Steady flow) หรือการไหลแบบไม่คงตัว (Unsteady flow) การไหลสม่ำเสมอ (Uniform flow) หรือการไหลไม่สม่ำเสมอ (Non-uniform flow) และการไหลแบบหมุนวน (Rotational flow) หรือการไหลแบบไม่หมุนวน (Irrotational flow) เป็นต้น

การไหลแบบราบเรียบ อนุภาคของของไหลจะเคลื่อนที่อย่างเป็นระเบียบมีลักษณะเหมือนเป็นชั้นบาง ๆ และมีการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างชั้นน้อยมาก

การไหลแบบปั่นป่วน อนุภาคของของไหลจะเคลื่อนที่อย่างไม่เป็นระเบียบ และมีการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างโมเลกุลของของไหลมาก

การไหลคงตัว (Steady flow) คือ การไหลที่มีสภาพการไหล ณ จุดใดจุดหนึ่งในของไหลคงที่ไม่แปรเปลี่ยนตามกาลเวลา ทั้งนี้ ณ ตำแหน่งอื่นอาจจะแตกต่างจากตำแหน่งนี้ได้ ซึ่งการไหลคงตัวจะเกิดขึ้นเฉพาะเมื่อการไหลเป็นแบบราบเรียบเท่านั้น

การไหลสม่ำเสมอ (Uniform flow) คือ การไหลที่มีความเร็ว ณ ทุก ๆ จุดในของไหลคงที่ทั้งขนาดและทิศทางที่เวลาใดเวลาหนึ่ง กล่าวคือ การไหลสม่ำเสมอมีสภาพการไหลที่ไม่แปรเปลี่ยนตามระยะทาง

สภาพการไหลโดยทั่ว ๆ ไป จะเกิดจากการผสมสภาพการไหลเข้าด้วยกัน คือ

1. การไหลคงตัวแบบสม่ำเสมอ (Steady uniform flow) เช่น การไหลด้วยอัตราคงที่ผ่านท่อตรงที่ยาวมาก
2. การไหลคงตัวแบบไม่สม่ำเสมอ (Steady non-uniform flow) เช่น การไหลด้วยอัตราคงที่ผ่านท่อที่มีขนาดค่อย ๆ ขยายใหญ่ขึ้น
3. การไหลไม่คงตัวแบบสม่ำเสมอ (Unsteady uniform flow) เช่น การไหลในท่อตรงที่มีอัตราการไหลไม่คงที่
4. การไหลไม่คงตัวแบบไม่สม่ำเสมอ (Unsteady non-uniform flow) เช่น การไหลในอัตราไม่คงที่ผ่านท่อที่ค่อย ๆ ขยายใหญ่ขึ้น

3.1 รูปแบบการไหล (Flow pattern) ประกอบด้วย

เส้นการไหล (Streamline) คือ เส้นที่แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในสนามการไหล เมื่อพิจารณาเส้นการไหลของอนุภาคทั้งหมดก็จะได้เส้นการไหลจำนวนมาก ซึ่งรูปแบบการไหลที่มีเส้นการไหลประกอบกันจำนวนมากนี้ เรียกว่า สนามการไหล

ลำการไหล (Stream tube) คือ กลุ่มของเส้นการไหล

เส้นทางการไหล (Path line) คือ เส้นที่แสดงให้เห็นถึงทิศทางของความเร็วของอนุภาคใดอนุภาคหนึ่งในช่วงเวลานั้น

ในการไหลคงตัว เส้นการไหลและเส้นทางการไหลจะเป็นเส้นเดียวกัน เพราะอนุภาคเคลื่อนที่ตามเส้นการไหล และเส้นการไหลนี้ก็แสดงถึงทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคในเวลาเดียวกันด้วย ในทางตรงกันข้าม การไหลไม่คงตัวนั้นเวกเตอร์ความเร็วที่จุดต่าง ๆ จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เส้นการไหลจึงเปลี่ยนตำแหน่งไปเรื่อย ๆ ทำให้เส้นการไหลกับเส้นทางการไหลแตกต่างกันออกไป

ปริมาตรควบคุม (Control volume) คือ ขอบเขตปริมาตรจำกัดในสนามการไหลที่กำหนดขึ้น เพื่อพิจารณาคุณสมบัติการไหลเฉพาะในปริมาตรควบคุมเท่านั้น โดยปริมาตรควบคุมสามารถนำมาเพื่อวิเคราะห์การไหลได้ คือ สมการสภาพต่อเนื่อง สมการโมเมนตัม และสมการพลังงาน

การไหลหนึ่งมิติ (One - dimensional flow) คือ การไหลตามเส้นการไหลใด ๆ ที่พิจารณาการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติการไหล เช่น ความดัน ความเร็ว และอื่น ๆ เฉพาะในทิศทางของเส้นการไหลเท่านั้น

การไหลสองมิติ (Two - dimensional flow) คือ การไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติใน 2 ระนาบ เช่น การไหลผ่านฝาย

การไหลสามมิติ (Three-dimensional flow) คือ การไหลที่มีการเปลี่ยนแปลงสภาพทั้ง 3 แกน เป็นการไหลโดยทั่วไปตามธรรมชาติ

3.2 สมการต่อเนื่อง (Continuity equation)

อัตราการไหล (Flow rate หรือ Discharge) คือ ปริมาณของไหลที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัดใด ๆ ที่กำหนด ต่อหนึ่งหน่วยเวลา ซึ่งอัตราการไหลมีอยู่ 3 ประเภท คือ

1) อัตราการไหลเชิงปริมาตร (Volume flow rate): Q มีสมการทั่วไป ดังนี้

$$Q = Av \tag{3.1}$$

เมื่อ A คือ พื้นที่หน้าตัดการไหล

v คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหล

หน่วยของอัตราการไหลในระบบ SI คือ m^3/s และในระบบอังกฤษ คือ ft^3/s

2) อัตราการไหลเชิงน้ำหนัก (Weight flow rate): Q_w มีสมการทั่วไป ดังนี้

$$Q_w = \gamma Q \qquad (3.2)$$

เมื่อ γ คือ น้ำหนักจำเพาะของของไหล

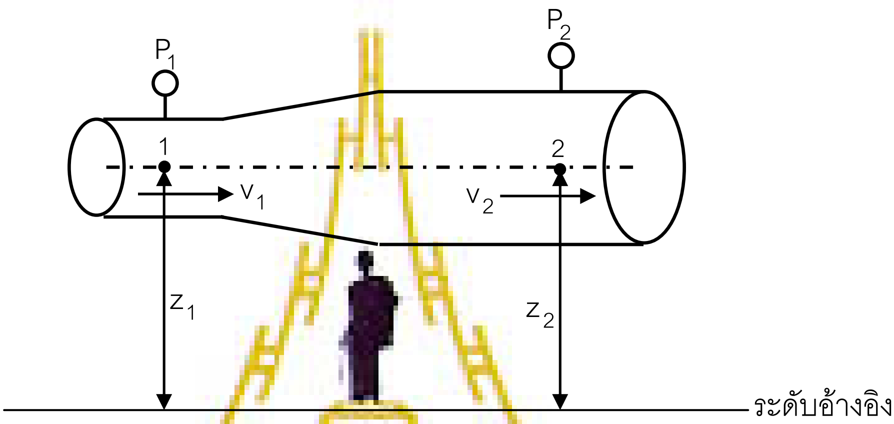
หน่วยของอัตราการไหลในระบบ SI คือ N/s และในระบบอังกฤษ คือ lb/s

3) อัตราการไหลเชิงมวล (Mass flow rate): Q_M มีสมการทั่วไป ดังนี้

$$Q_M = \rho Q = \rho A v \qquad (3.3)$$

หน่วยของอัตราการไหลในระบบ SI คือ kg/s และในระบบอังกฤษ คือ slug/s

สมการการไหลต่อเนื่องในการไหลคงตัวมิติเดียว ดังภาพที่ 3.1 เป็นการประยุกต์ใช้หลักอนุรักษ์มวลสาร คือภายในขอบเขตจำกัดมวลสารจะไม่มีการสูญหาย



ภาพที่ 3.1 สมการการไหลต่อเนื่องในการไหลคงตัวมิติเดียว

ดังนั้น $Q_{M1} = Q_{M2}$

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

เนื่องจากของไหลไม่มีการเปลี่ยนคุณสมบัติ ดังนั้น $\rho_1 = \rho_2$

เพราะฉะนั้น อัตราการไหลเชิงปริมาตร สำหรับของไหลกดอัดไม่ได้ หรือมีความหนาแน่นคงที่ จะได้

$$Q_1 = Q_2 \qquad (3.4)$$

สมการที่ 3.4 นี้ เรียกว่า สมการต่อเนื่อง

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 3.1 จากภาพที่ 3.1 ท่อมีเส้นผ่าศูนย์กลางที่หน้าตัด 1 และ 2 เท่ากับ 50 และ 100 mm ตามลำดับ น้ำที่อุณหภูมิ 70°C ไหลเข้าหน้าตัด 1 ด้วยความเร็ว 8 m/s จงหา (ก) ความเร็วที่หน้าตัด 2 (ข) อัตราการไหลเชิงปริมาตร (ค) อัตราการไหลเชิงน้ำหนัก และ (ง) อัตราการไหลเชิงมวล กำหนดให้ น้ำที่ 70°C มีน้ำหนักจำเพาะเท่ากับ $9.59\,\frac{kN}{m^3}$ และความหนาแน่นเท่ากับ $978\,\frac{kg}{m^3}$

วิธีทำ

(ก) จาก $Q_1 = Q_2$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{\pi}{4}(50\,mm)^2\left(8\,\frac{m}{s}\right) = \frac{\pi}{4}(100\,mm)^2\,v_2$$

$$v_2 = 2\,m/s$$ <u>ตอบ</u>

(ข) จาก $Q = Av$

$$Q = \frac{\pi}{4}(50\,mm)^2\left(8\,\frac{m}{s}\right) = 0.0157\,m^3/s$$ <u>ตอบ</u>

(ค) จาก $Q_w = \gamma Q$

$$Q_w = \left(9.59\,\frac{kN}{m^3}\right)\left(0.0157\,\frac{m^3}{s}\right) = 0.151\,kN/s$$ <u>ตอบ</u>

(ง) จาก $Q_M = \rho A v = \rho Q$

$$Q_M = \left(978\,\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.0157\,\frac{m^3}{s}\right) = 15.35\,kg/s$$ <u>ตอบ</u>

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 3.2 ในระบบท่ออากาศ ณ ความดัน 101.35 kPa อุณหภูมิ 40°C ท่อที่หน้าตัด 1 มีความเร็วเฉลี่ย 6.1 m/s และพื้นที่หน้าตัดสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความกว้าง เท่ากับ 30.5 cm และท่อหน้าตัดที่ 2 มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 457 mm ความเร็วที่วัดได้เท่ากับ 4.57 m/s จงคำนวณหา (ก) ความหนาแน่นของอากาศ และ (ข) อัตราการไหลเชิงน้ำหนักในหน่วย N/s

กำหนดให้ ที่ความดัน 101.35 kPa และอุณหภูมิ 40°C อากาศมีความหนาแน่น 1.134 kg/m^3 และน้ำหนักจำเพาะ 11.14 N/m^3

วิธีทำ

เมื่อ $v_1 = 6.1\,m/s, A_1 = 30.5^2\ cm^2, v_2 = 4.57\,m/s, D_2 = 457\,mm$

(ก) จาก $Q_{M1} = Q_{M2}$

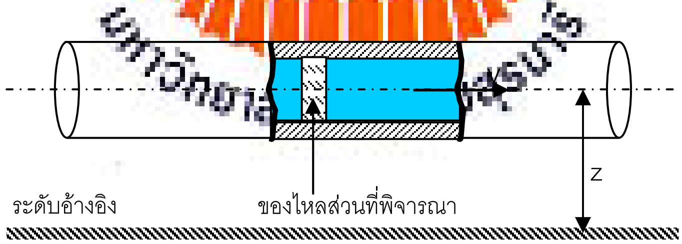
$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 A_1 v_1}{A_2 v_2} = \frac{\left(1.134\,\frac{kg}{m^3}\right)(30.5\,cm)^2\left(6.1\,\frac{m}{s}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}(45.7\,cm)^2\right)\left(4.57\,\frac{m}{s}\right)} = 0.858\,kg/m^3 \qquad \underline{\text{ตอบ}}$$

(ข) จาก $Q_w = \gamma Q = \gamma A_1 v_1 = \gamma A_2 v_2$

$$Q_w = \left(11.14\,\frac{N}{m^3}\right)(30.5\,cm)^2\left(\frac{1\,m^2}{10^4\,cm^2}\right)\left(6.1\,\frac{m}{s}\right) = 6.32\,N/s \qquad \underline{\text{ตอบ}}$$

3.3 สมการพลังงานและสมการเบอร์นูลลี่ (Energy equation and Bernoulli's equation)



ภาพที่ **3.2** สมการพลังงานในการไหลในท่อ

จากภาพที่ 3.2 เมื่อของไหลส่วนที่พิจารณา ไหลภายในท่อด้วยความเร็ว v สามารถพิจารณาพลังงานได้ 3 รูปแบบ ดังนี้

1. พลังงานศักย์ (Potential Energy; PE)

$PE = wz$ เมื่อ w คือ น้ำหนักของของไหล (3.5)

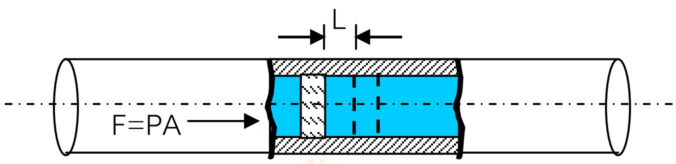
2. พลังงานจลน์ (Kinematic Energy; KE)

$$KE = \frac{wv^2}{2g} \tag{3.6}$$

3. พลังงานการไหล (Flow Energy; FE)

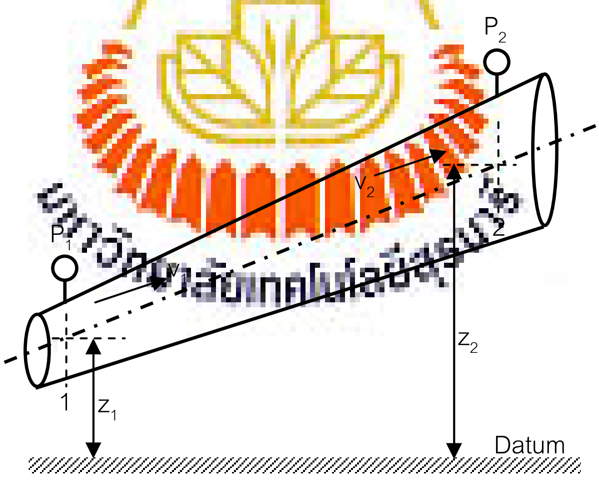
$$FE = \frac{wP}{\gamma} \qquad \text{เมื่อ P คือ ความดัน} \tag{3.7}$$

โดยพลังงานทั้งหมด (E) ที่เกิดขึ้น คือ E = FE + PE + KE (3.8)



ภาพที่ 3.3 แรงที่กระทำต่อของไหลในท่อ

จาก $FE = \frac{wP}{\gamma}$ และเมื่อออกแรง F = PA ทำให้ของไหลส่วนที่พิจารณาเคลื่อนที่ไปเป็นระยะทาง L ดังภาพ งานที่เกิดขึ้นนี้ มีค่าเท่ากับผลคูณของความดันกับปริมาตรของของไหล เมื่อปริมาตรของของไหล คือ ผลคูณระหว่างพื้นที่หน้าตัดการไหลกับระยะทาง L



ภาพที่ 3.4 สมการพลังงานสำหรับการไหลในท่อ

จากภาพที่ 3.4 เมื่อพิจารณาพลังงานภายในระบบว่า พลังงานไม่มีการสูญหาย (Conservation of energy) แต่พลังงานสามารถที่จะเปลี่ยนรูปได้ ซึ่งเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน นั้นคือ พลังงานที่จุดที่ 1 เท่ากับพลังงานที่จุดที่ 2

$$E_1 = E_2$$

เมื่อ $$E_1 = \frac{w_1P_1}{\gamma} + w_1z_1 + \frac{w_1v_1^2}{2g} \text{ และ } E_2 = \frac{w_2P_2}{\gamma} + w_2z_2 + \frac{w_2v_2^2}{2g}$$

จะได้ $$\frac{w_1P_1}{\gamma} + w_1z_1 + \frac{w_1v_1^2}{2g} = \frac{w_2P_2}{\gamma} + w_2z_2 + \frac{w_2v_2^2}{2g}$$

เมื่อ $w_1 = w_2$

$$\therefore \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \qquad (3.9)$$

สมการที่ 3.9 เรียกว่า สมการเบอร์นูลลี่ (Beroulli's equation)

เมื่อ $\frac{P}{\gamma}$ เรียกว่า เฮดความดัน (Pressure head)

z เรียกว่า เฮดระดับ (Elevation head)

$\frac{v^2}{2g}$ เรียกว่า เฮดความเร็ว (Velocity head)

$\frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}$ เรียกว่า เฮดทั้งหมด (Total head)

ข้อจำกัดสำหรับสมการเบอร์นูลลี่

1. ของเหลวที่พิจารณาเป็นของเหลวที่กดอัดไม่ได้ ดังนั้น น้ำหนักจำเพาะจึงคงที่
2. พลังงานจากหน้าตัดที่ 1 เท่ากับพลังงานที่หน้าตัดที่ 2 หรือพลังงานไม่มีการสูญหาย
3. ในระบบที่พิจารณาของเหลวจะไม่ได้รับความร้อน ดังนั้น จึงไม่มีการเปลี่ยนสถานะของของเหลว
4. ไม่นำการสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานมาพิจารณา

ตัวอย่าง 3.3 น้ำไหลในท่อจากหน้าตัดที่ 1 ไปหน้าตัดที่ 2 ซึ่งหน้าตัดที่ 1 มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 25 mm ความดันเกจ 345 kPa และความเร็วการไหล 3.0 m/s และหน้าตัดที่ 2 มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 50 mm อยู่เหนือหน้าตัดที่ 1 ที่ระดับความสูง 2.0 m เมื่อไม่มีการสูญเสียพลังงาน จงคำนวณหาความดันที่หน้าตัดที่ 2

วิธีทำ

จาก $Q_1 = Q_2$

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

$$\frac{\pi}{4}(25\,\text{mm})^2\left(3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = \frac{\pi}{4}(50\,\text{mm})^2(v_2)$$

$$v_2 = 0.75\,\text{m/s}$$

จาก $\dfrac{P_1}{\gamma} + z_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{P_2}{\gamma} + z_2 + \dfrac{v_2^2}{2g}$

$$\frac{345\,\text{kPa}}{9.81\dfrac{\text{kN}}{\text{m}^3}} + 0 + \frac{\left(3\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(9.81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = \frac{P_2}{9.81\dfrac{\text{kN}}{\text{m}^3}} + 2\,\text{m} + \frac{\left(0.75\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(9.81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$P_2 = 329.6\,\text{kPa}$$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.4 ของเหลวชนิดหนึ่งมีความถ่วงจำเพาะ1.26 ไหลเข้าท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 60 cm ความดันตรงทางเข้าเท่ากับ 300 kN/m^2 อัตราการไหล 700 litter/s จงคำนวณหาความดันที่จุดที่สองซึ่งอยู่ต่ำกว่าทางเข้า 1 m กำหนดให้ ท่อตรงจุดที่สอง มีขนาดเส้นผ่าศูนย์ 30 cm และไม่มีการสูญเสียใด ๆ

วิธีทำ

จาก $Q_1 = Q_2$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.7\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\dfrac{\pi}{4}(0.60\,\text{m})^2} = 2.48\,\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.7\dfrac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\dfrac{\pi}{4}(0.30\,\text{m})^2} = 9.90\,\text{m/s}$$

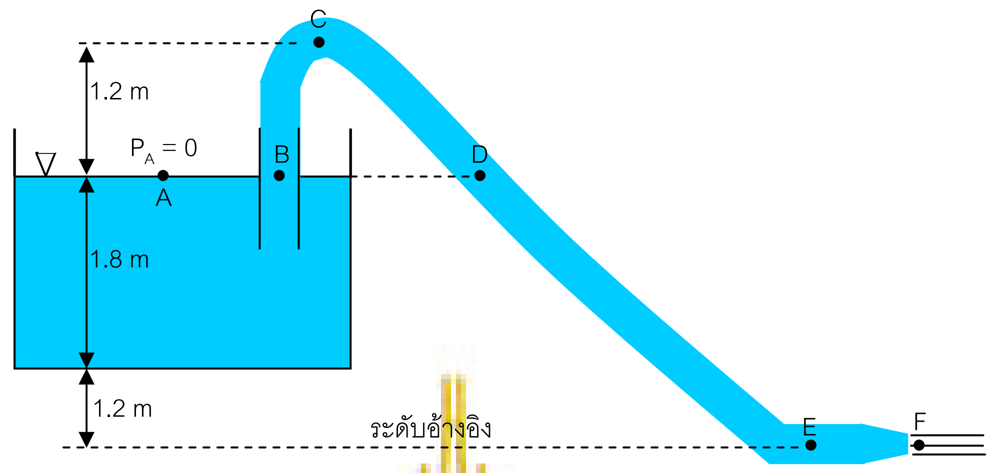
จาก $\dfrac{P_1}{\gamma} + z_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = \dfrac{P_2}{\gamma} + z_2 + \dfrac{v_2^2}{2g}$

$$\frac{300\,\text{kPa}}{(1.26\times 9.81\dfrac{\text{kN}}{\text{m}^3})} + 1\,\text{m} + \frac{\left(2.48\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\left(9.81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = \frac{P_2}{(1.26\times 9.81\dfrac{\text{kN}}{\text{m}^3})} + 0 + \frac{(9.90\dfrac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2\left(9.81\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

$$P_2 = 254.49\ \text{kPa}$$ <u>ตอบ</u>

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 3.5 ระบบกาลักน้ำดูดน้ำจากถังน้ำโดยใช้ท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดการไหล 1.257 x 10^{-3} m^2 ดังภาพ และที่หัวฉีดมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 25 mm เมื่อไม่มีการสูญเสียพลังงาน จงคำนวณหาความดันที่จุด B ถึงจุด E



วิธีทำ

จุด A ความดัน $P_A = 0$ Pa (gage) และ $v_A = 0$

จุด F ความดัน $P_F = 0$ Pa (gage) เพราะเปิดสู่บรรยากาศ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด F; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_F}{\gamma} + z_F + \frac{v_F^2}{2g}$

จะได้ $z_A = \frac{v_F^2}{2g}$

แทนค่า $(1.8 \text{ m} + 1.2 \text{ m}) = \frac{v_F^2}{2 \times 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

$\therefore v_F = 7.67 \text{ m/s}$

จาก $Q = Av = A_F v_F$

$$Q = \left(7.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(\frac{\pi}{4}(25\,\text{mm})^2\right) = 3.77 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด B; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$

จะได้ $\frac{P_B}{\gamma} = -\frac{v_B^2}{2g}$ (1)

จาก $Q_B = A_B v_B$

$Q_B = Q_F$

$$v_B = \frac{Q_B}{A_B} = \frac{3.77\times10^{-3}\ \frac{m^3}{s}}{1.257\times10^{-3}\ m^2} = 3\ \text{m/s}$$

จากสมการที่ (1) $P_B = -\frac{\gamma v_B^2}{2g} = -\frac{\left(9.81\frac{kN}{m^3}\right)\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)} = -4.5\ \text{kPa}$ <u>ตอบ</u>

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด C; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_C}{\gamma} + z_C + \frac{v_C^2}{2g}$

จะได้ $z_A = \frac{P_C}{\gamma} + z_C + \frac{v_C^2}{2g}$

แทนค่า $3\ m = \frac{P_c}{\gamma} + 4.2\ m + \frac{v_c^2}{2g}$

$$\frac{P_C}{\gamma} = -1.2\ m + \frac{v_c^2}{2g} \qquad (2)$$

จาก $Q_c = Q_F$

$$v_c = \frac{3.77\times10^{-3}\ \frac{m^3}{s}}{1.257\times10^{-3}\ m^2} = 3\ \text{m/s}$$

จากสมการที่ (2) $\frac{P_C}{\gamma} = -1.2\ m + \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2\times9.81\frac{m}{s^2}}$

ดังนั้น Pc = -7.27 kPa <u>ตอบ</u>

เนื่องจากจุด D และ จุด B อยู่ที่ระดับเดียวกันและ $v_D = v_B$ ดังนั้น $P_D = P_B = -4.5\ \text{kPa}$ <u>ตอบ</u>

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด E; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_E}{\gamma} + z_E + \frac{v_E^2}{2g}$

จะได้ $z_A = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2g}$

แทนค่า $3\ m = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{v_E^2}{2g}$ (3)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

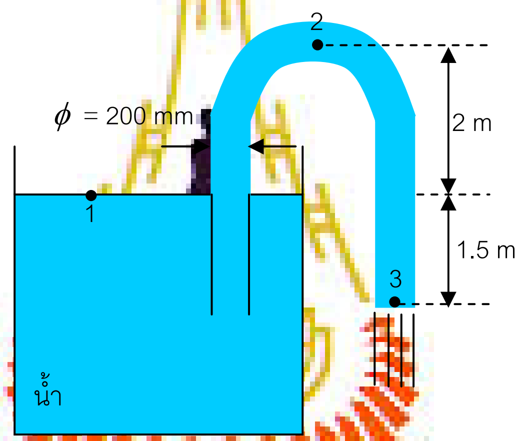
$$v_E = \frac{3.77\times10^{-3}\ \frac{m^3}{s}}{1.257\times10^{-3}\ m^2} = 3\,m/s$$

$$P_E = \left(9.81\frac{kN}{m^3}\right)\left(3\,m - \frac{\left(3\frac{m}{s}\right)^2}{2\times9.81\frac{m}{s^2}}\right) = 24.93\,kPa \qquad \underline{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 3.6 ระบบกาลักน้ำมีน้ำไหลออกในอัตรา 150 ลิตร/วินาที จงคำนวณหา

(ก) ความสูญเสีย (Loss) จากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 3 ในรูปของเฮดความเร็ว

(ข) ความดันที่จุดที่ 2 โดยที่สองในสามของความสูญเสียทั้งหมดเกิดขึ้นระหว่างจุดที่ 1 และจุดที่ 2



วิธีทำ

(ก) สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 1 ไปยังจุด 3; $\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{v_3^2}{2g} + h_{L1\to3}$

จะได้ $z_1 = \frac{v_3^2}{2g} + h_{L1\to3}$

แทนค่า $1.5\,m = \frac{v_3^2}{2g} + h_{L1\to3}$

เมื่อ $v_3 = \frac{0.15\,\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}(0.2\,m)^2} = 4.77\,m/s$

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

$$h_{L1\to3} = (1.5\,\text{m}) - \frac{\left(4.77\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.34\ \text{m}$$

(ข) $h_{L1\to2} = \frac{2}{3}\times0.34\,\text{m} = 0.23\,\text{m}$

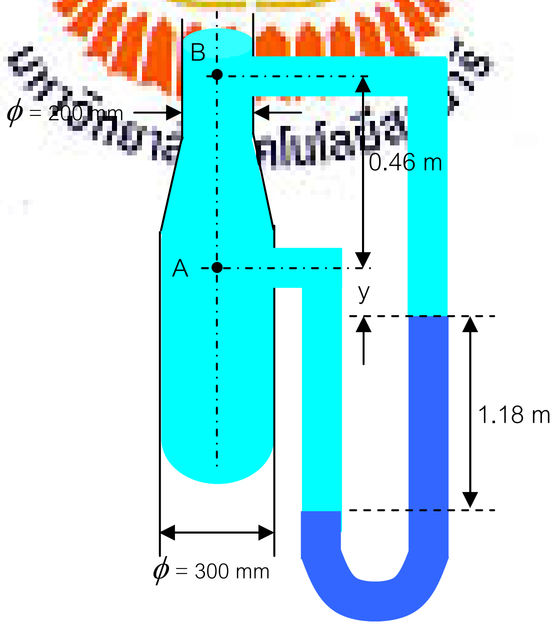
สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}+h_{L1\to2}$

แทนค่า $1.5\,\text{m} = \frac{P_2}{\gamma} + 3.5\,\text{m} + \frac{v_2^2}{2g} + 0.23\,\text{m}$

เมื่อ $v_2 = v_3$

$$P_2 = 9.81\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}\left[1.5\,\text{m} - 3.5\,\text{m} - 0.23\,\text{m} - \frac{\left(4.77\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2\times9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right] = -33.25\,\text{kPa}$$ ตอบ

ตัวอย่าง 3.7 เวนจูรี่มิเตอร์ ดังภาพ บรรจุน้ำที่อุณหภูมิ 60°C และมานอมิเตอร์บรรจุของเหลวที่มีความถ่วงจำเพาะ 1.25 จงคำนวณหาความเร็วของการไหล และอัตราการไหลที่หน้าตัด A กำหนดให้ น้ำหนักจำเพาะของน้ำที่ 60°C = 9.65 kN/m^3



วิธีทำ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด B; $\frac{P_A}{\gamma}+z_A+\frac{v_A^2}{2g}=\frac{P_B}{\gamma}+z_B+\frac{v_B^2}{2g}$

จะได้ $$\frac{P_A-P_B}{\gamma}+\left(z_A-z_B\right)=\frac{v_B^2-v_A^2}{2g} \quad (1)$$

เมื่อ $z_A-z_B=0-0.46\,m=-0.46\,m$

γ_g = น้ำหนักจำเพาะของของเหลวที่อยู่ในมานอมิเตอร์

$= 1.25\times 9.81\frac{kN}{m^3}=12.26\,kN/m^3$

พิจารณามานอมิเตอร์

$$P_A=-\gamma\cdot y-\gamma(1.18\,m)+\gamma_g(1.18\,m)+\gamma\cdot y+\gamma(0.46\,m)+P_B$$

$$P_A-P_B=\gamma(-1.18\,m+0.46\,m)+\gamma_g(1.18\,m)$$

$$\frac{P_A-P_B}{\gamma}=(-0.72\,m)+\frac{\gamma_g}{\gamma}(1.18\,m)$$

$$\frac{P_A-P_B}{\gamma}=(-0.72\,m)+\frac{\left(12.26\frac{kN}{m^3}\right)(1.18\,m)}{9.65\frac{kN}{m^3}}=0.78\,m$$

จาก $A_Av_A=A_Bv_B$

$$v_B=v_A\left(\frac{A_A}{A_B}\right)=v_A\left(\frac{\frac{\pi}{4}(300\,mm)^2}{\frac{\pi}{4}(200\,mm)^2}\right)=2.25v_A$$

$$v_B^2=5.06v_A^2$$

$$v_B^2-v_A^2=5.06v_A^2-v_A^2=4.06v_A^2$$

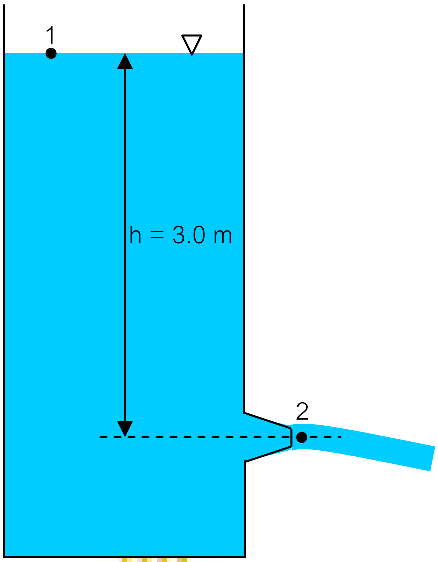
แทนค่าในสมการที่ (1)

$$0.78\,m-0.46\,m=\frac{4.06v_A^2}{2\times 9.81\frac{m}{s^2}}$$

$$v_A=1.24\frac{m}{s}$$

$$Q=A_Av_A=\left(1.24\frac{m}{s}\right)\left(\frac{\pi}{4}(0.3\,m)^2\right)=8.77\times 10^{-2}\,m^3/s$$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.8 จากภาพ จงคำนวณหาความเร็วของการไหลที่หัวฉีด หรือจุด 2



วิธีทำ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

จะได้ $z_1 = \frac{v_2^2}{2g} = h$

แทนค่า $v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(3\,m)} = 7.67\text{ m/s}$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.9 จากตัวอย่าง 3.8 จงคำนวณหาความเร็วของการไหลที่หัวฉีดและอัตราการไหล เมื่อความลึก h มีค่าตั้งแต่ 3.0 m ถึง 0.5 m เมื่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของหัวฉีดคือ 50 mm

วิธีทำ

จากตัวอย่างที่ 3.8; $h = 3$ m และ $v_2 = 7.67\ \text{m/s}$

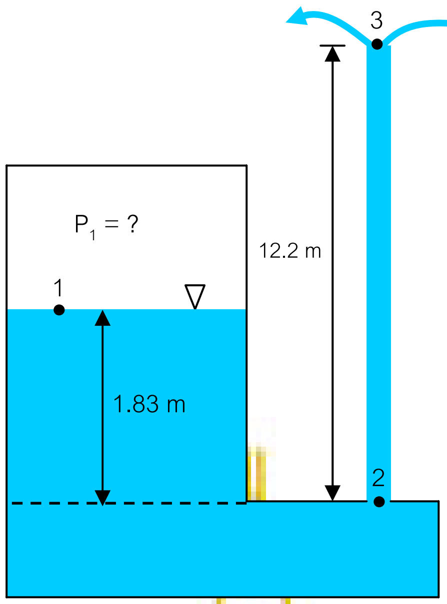
$$A_2 = \frac{\pi}{4}(50\,\text{mm})^2 = 1.963 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

$$\therefore h = 3\,\text{m}; Q = \left(1.963 \times 10^{-3}\ \text{m}^2\right) \cdot \left(7.67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 1.51 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{s}$$

Depth; h (m)	$v_2 = \sqrt{2gh}$	$Q\left(\text{m}^3/\text{s}\right)$
3.0	7.67	1.51×10^{-2}
2.5	7.00	1.38×10^{-2}
2.0	6.26	1.23×10^{-2}
1.5	5.42	1.07×10^{-2}
1.0	4.43	0.87×10^{-2}
0.5	3.13	0.61×10^{-2}

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 3.10 จากภาพ จงคำนวณหาความดันอากาศที่ต้องการเพื่อให้น้ำจากหัวฉีดขึ้นสูง 12.2 m



วิธีทำ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$

แทนค่า $\frac{P_1}{\gamma}+1.83\,\text{m}=\frac{v_2^2}{2g}$ (1)

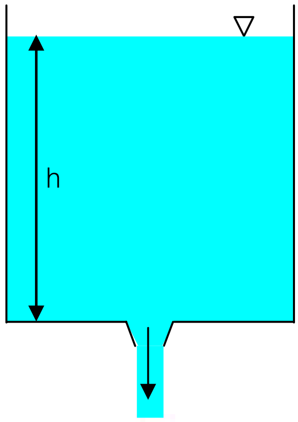
สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 2 ไปยังจุด 3; $\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}=\frac{P_3}{\gamma}+z_3+\frac{v_3^2}{2g}$

แทนค่า $\frac{v_2^2}{2g}=z_3=12.2\,\text{m}$ (2)

จากสมการ (1)

$$P_1=(12.2-1.83\,\text{m})\left(9.81\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}\right)=101.73\,\text{kN/m}^2=101.73\,\text{kPa}$$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.11 จากภาพ จงหาเวลาที่จะต้องใช้ในการปล่อยน้ำที่ระดับความสูงตั้งแต่ 3.0 m ถึง 0.50 m เมื่อถังน้ำมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1.50 m และหัวฉีดมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 50 mm



วิธีทำ

h มีค่าตั้งแต่ 3.0 m ถึง 0.5 m

ถังน้ำมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $D_t = 1.5\,m$

$$A_t = \frac{\pi}{4}D_t^2 = \frac{\pi}{4}(1.5\,m)^2 = 1.767\,m^2$$

หัวฉีดที่ก้นถังมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง $D_j = 50\,mm$

$$Aj_t = \frac{\pi}{4}D_j^2 = \frac{\pi}{4}(50\,mm)^2 = 0.001963\,m^2$$

ที่หัวฉีดมีค่า $Q_j = A_j v_j$ และที่เวลา dt ปริมาตรของของไหลจากหัวฉีดคือ

$$Q(dt) = A_j v_j (dt) \qquad (1)$$

ปริมาตรของน้ำที่ไหลออกจะลดลงในช่วงที่ dt เพิ่มขึ้นจะทำให้ระดับน้ำ dh ลดลง ดังนั้น

$$\text{ปริมาตรที่ไหลออก} = -A_t\,dh \qquad (2)$$

สมการที่ (1) เท่ากับสมการที่ (2)

$$A_j v_j (dt) = -A_t (dh) \qquad (3)$$

จากตัวอย่าง 3.8, $v_2 = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_2 = v_j$

จากสมการที่ (3) $dt = \dfrac{-\left(\dfrac{A_t}{A_j}\right)}{v_j}dh = \dfrac{-\left(\dfrac{A_t}{A_j}\right)}{\sqrt{2g}}h^{-1/2}dh$

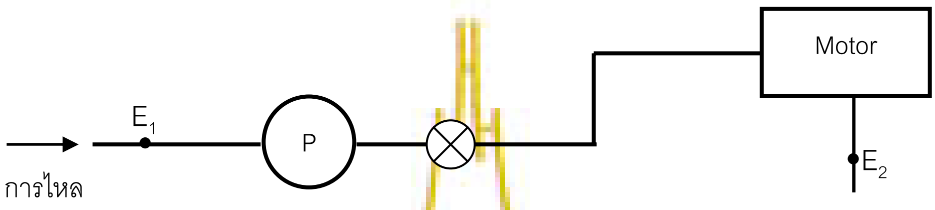
$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-\left(\dfrac{A_t}{A_j}\right)}{\sqrt{2g}}\int_{h_1}^{h_2} h^{-1/2}dh$$

$$t_2 - t_1 = \frac{-\left(\dfrac{A_t}{A_j}\right)}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{\left(h_2^{1/2} - h_1^{1/2}\right)}{1/2} = \frac{2\left(\dfrac{A_t}{A_j}\right)}{\sqrt{2g}}\left(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}\right)$$

แทนค่า
$$t_2 - t_1 = \frac{2\left(\dfrac{1.767}{0.001963}\right)}{\sqrt{2 \times 9.81}}\left[(3.0\,\mathrm{m})^{1/2} - (0.5\,\mathrm{m})^{1/2}\right] = 417\,\mathrm{s}$$

= 6 นาที 57 วินาที <u>ตอบ</u>

3.4 **สมการทั่วไปของสมการพลังงาน** (General Energy Equation)



ภาพที่ 3.5 สมการทั่วไปของสมการพลังงานของระบบท่อ

สมการทั่วไปของสมการพลังงาน คือ

$$E = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} \tag{3.10}$$

จากภาพที่ 3.5 เมื่อพลังงานไม่มีการสูญหาย จะได้

$$E_1 = E_2$$

$$E_1 + h_A - h_L - h_R = E_2$$

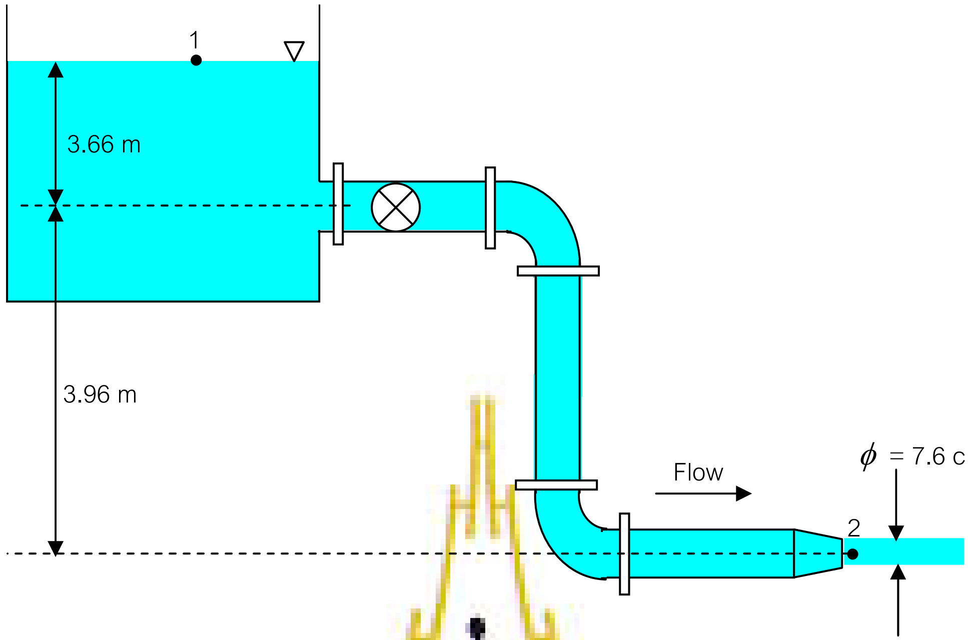
$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_A - h_R - h_L = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \tag{3.11}$$

เมื่อ h_A คือ พลังงานที่เพิ่มเข้าไป (Energy added) เช่น พลังงานที่ได้จากปั๊ม

h_R คือ พลังงานที่ถูกเปลี่ยนไปเป็นพลังงานกล (Energy removed) เช่น พลังงานจากน้ำไปปั่นมอเตอร์ ซึ่งจะให้พลังงานกลออกมา

h_L คือ พลังงานที่สูญเสียไปจากระบบ (Energy losses) ซึ่งประกอบด้วย (1) การสูญเสียหลัก คือ การสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทาน และ (2) การสูญเสียรอง คือ การสูญเสียพลังงานเนื่องจากวาล์ว และข้อต่อ เป็นต้น

ตัวอย่าง 3.12 น้ำไหลออกจากถังเก็บน้ำขนาดใหญ่ด้วยอัตราการไหล 0.034 m^3/s ผ่านระบบท่อดังภาพ จงคำนวณหาพลังงานที่สูญเสียไปทั้งหมดอันเนื่องมาจากวาล์ว ข้อต่อ ทางเข้าท่อ และความเสียดทาน



วิธีทำ

สมการพลังงานจากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 2

$$E_1 = E_2$$

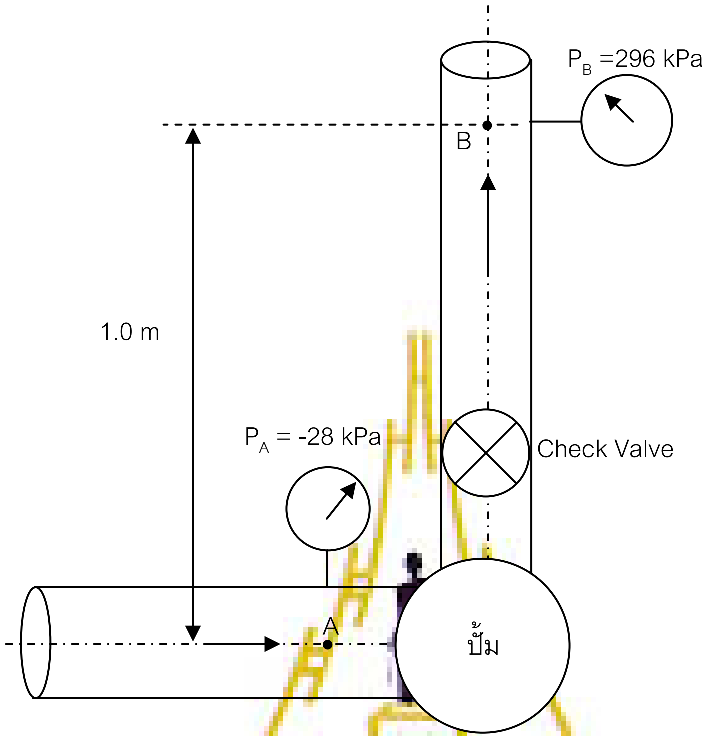
$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + h_A - h_R - h_L = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

จะได้ $$z_1 - h_L = \frac{v_2^2}{2g}$$

$$v_2 = \frac{0.034\,\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}(0.076\,m)^2} = 7.49\ m/s$$

แทนค่า $$h_L = z_1 - \frac{v_2^2}{2g} = (3.90 + 3.66\,m) - \frac{\left(7.49\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 4.70\,m$$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.13 จากภาพ น้ำมันที่มีค่าความถ่วงจำเพาะ 0.86 ไหลออกจากปั๊มด้วยอัตราการไหล 0.014 m^3/s จงคำนวณหาพลังงานที่ปั๊มจะต้องส่งถ่ายให้กับน้ำมันต่อหนึ่งหน่วยน้ำหนักสำหรับทั้งระบบ เมื่อพลังงานความสูญเสียเนื่องจากวาล์วและแรงเสียดทานมีค่าเท่ากับ 1.86 N-m/N กำหนดให้ $A_A = 4.768\times10^{-3}\ m^2$ และ $A_B = 2.168\times10^{-3}\ m^2$



วิธีทำ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด A ไปยังจุด B; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} + h_A - h_L = \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$

จะได้ $h_A = \frac{P_B - P_A}{\gamma} + (z_B - z_A) + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + h_L$

$$\gamma = S\cdot\gamma_w = 0.86\times9.81\frac{kN}{m^3} = 8.44\ kN/m^3$$

$$\frac{P_B - P_A}{\gamma} = \frac{296-(-28)\ kPa}{8.44\frac{kN}{m^3}} = 38.4\ m$$

$$z_B - z_A = 1.0\ m$$

$$Q = Av = A_A v_A = A_B v_B$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.014\dfrac{m^3}{s}}{4.768\times10^{-3}\ m^2} = 2.94\ m/s$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.014\dfrac{m^3}{s}}{2.168\times10^{-3}\ m^2} = 6.46\,m/s$$

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = \frac{\left(6.46\dfrac{m}{s}\right)^2 - \left(2.94\dfrac{m}{s}\right)^2}{2\times9.81\dfrac{m}{s^2}} = 1.69\,m$$

$$\therefore h_A = 38.4\,m + 1\ m + 1.69\,m + 1.86\,m = 42.95\,m$$ <u>ตอบ</u>

3.5 กำลังงานที่ได้จากปั๊ม (Power Required by Pump)

กำลังงานที่ได้รับจากปั้ม คือ อัตราส่วนของพลังงานจากปั้มกับเวลา สามารถหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$\text{กำลังงาน} = \frac{\text{Energy}}{\text{Time}} = \frac{\text{Energy}}{\text{Weight}}\times\frac{\text{Weight}}{\text{Time}} = h_A\cdot W = h_A\cdot\gamma\cdot Q = P_A$$

ระบบ SI; กำลังม้า $P_A = \dfrac{h_A\gamma Q}{746}$ (3.12)

ระบบอังกฤษ; กำลังม้า $P_A = \dfrac{h_A\gamma Q}{550}$ (3.13)

เมื่อ γ คือ น้ำหนักจำเพาะของของไหล (N/m^3, lb/ft^3)

Q คือ อัตราการไหล (m^3/s, ft^3/s)

h_A คือ เฮดรวม (m, ft)

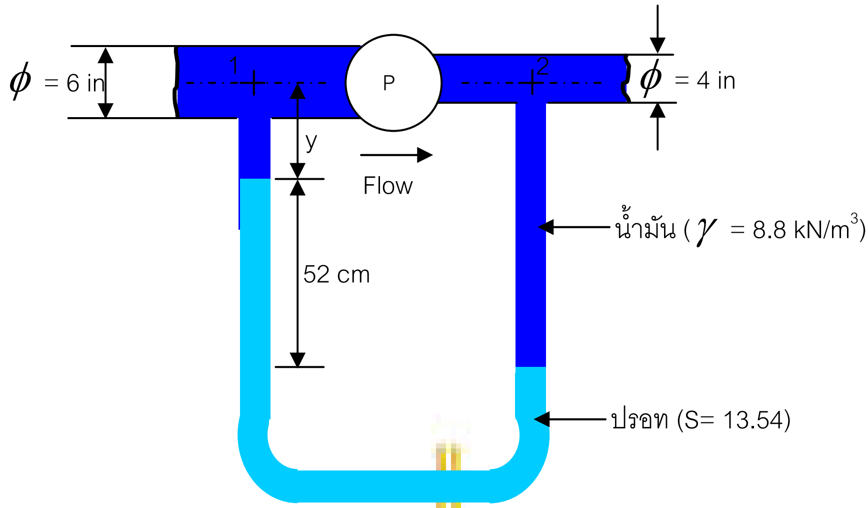
1 hp = 746 watt (W) = 550 ft lb/s

1 lb-ft/s = 1.356 watt

ในที่นี้ h_A อาจจะเป็นเฮดใด ๆ ที่ต้องการ เช่น ถ้าต้องการทราบกำลังที่จะได้จากเทอร์ไบน์ h_A จะแทนด้วย h_t หรือถ้าต้องการกำลังจากลำของไหล ค่าของ h_A คือ $\dfrac{v_j^2}{2g}$ โดยที่ v_j คือ ความเร็วของลำของไหล หรือถ้าต้องการทราบกำลังที่สูญเสียไปเนื่องจากความฝืด ค่าของ h_A จะเป็น h_L เป็นต้น

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ตัวอย่าง 3.14 จากภาพ จงหาประสิทธิภาพของปั้ม ถ้ากำลังงานที่ให้ไปเท่ากับ 2.87 kW เมื่ออัตราการสูบน้ำมัน เท่ากับ 125 m^3/h



วิธีทำ

สมการเบอร์นูลลี่ จากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\dfrac{P_1}{\gamma}+z_1+\dfrac{v_1^2}{2g}+h_A=\dfrac{P_2}{\gamma}+z_2+\dfrac{v_2^2}{2g}$

แทนค่า $h_A=\dfrac{P_2-P_1}{\gamma}+(z_2-z_1)+\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2g}$

พิจารณาความดันที่มานอมิเตอร์

$$P_1=-\gamma\, y-\gamma_m(0.52)+\gamma(0.52)+\gamma\, y+P_2$$

เมื่อ γ_m คือ น้ำหนักจำเพาะของปรอท

$$P_2-P_1=\gamma_m(0.52)-\gamma(0.52)=\left(13.54\times 9.81\frac{kN}{m^3}\right)-8.8\frac{kN}{m^3}=64.49\,kN/m^2$$

$$\frac{P_2-P_1}{\gamma}=\frac{64.49\dfrac{kN}{m^2}}{9.81\dfrac{kN}{m^3}}=7.3\,m$$

$$z_2-z_1=0$$

$$Q=125\frac{m^3}{hr}\times\frac{1}{3{,}600}\frac{hr}{s}=0.035\,m^3/s$$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.035\dfrac{m^3}{s}}{\dfrac{\pi}{4}\left(6\,in\times 2.54\dfrac{cm}{in}\times\dfrac{1\,m}{10^2\,cm}\right)^2}=1.92\,m/s$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.035\,\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}\left(4\,in \times 2.54\,\frac{cm}{in} \times \frac{1\,m}{10^2\,cm}\right)^2} = 4.32\,m/s$$

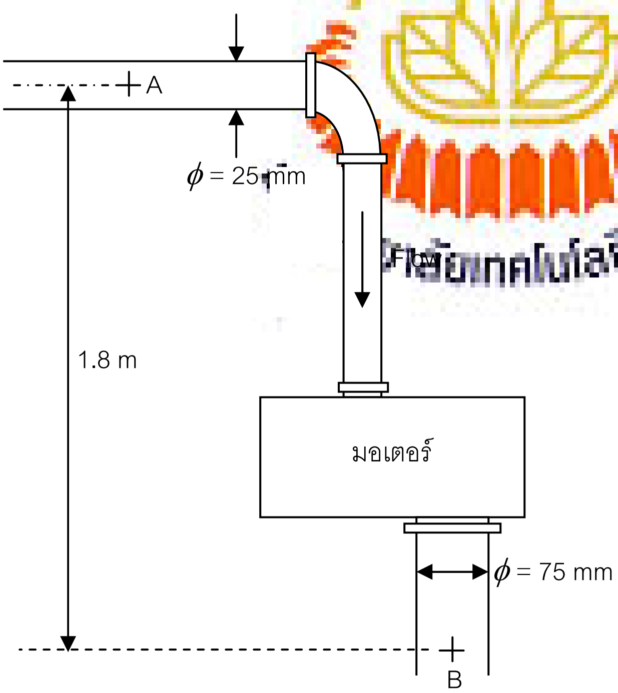
$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{\left(4.32\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(1.92\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 0.763\,m$$

$$\therefore h_A = 7.33\,m + 0 + 0.763\,m = 8.093\,m$$

$$P_A = h_A \gamma Q = (8.093\,m)\left(8.8\,\frac{kN}{m^3}\right)(0.035) = 2.49\,kW$$

$\therefore$ ประสิทธิภาพ; $e_m = \frac{2.49\,kW}{2.87\,kW} \times 100 = 86.76\ \%$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.15 น้ำไหลเข้ามอเตอร์ด้วยอัตราการไหล 115 lit/min ดังภาพ ความดันที่จุด A เท่ากับ 700 kPa และความดันที่จุด B เท่ากับ 125 kPa เมื่อการสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานในท่อเท่ากับ 4.0 N-m/N จงคำนวณหากำลังงานที่น้ำจะให้กับมอเตอร์ และถ้าประสิทธิภาพของมอเตอร์ 85% จงคำนวณหากำลังที่ออกมาจากมอเตอร์



วิธีทำ

$$Q = 115\,\frac{lit}{min} = 0.115\,\frac{m^3}{min} \times \frac{1\,min}{60\,s} = 1.92 \times 10^{-3}\ m^3/s$$

สมการเบอร์นูลลี่ จากจากจุด A ไปยังจุด B; $\frac{P_A}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} - h_R - h_L = \frac{P_B}{\gamma} + z_B + \frac{v_B^2}{2g}$

จะได้ $h_R = \frac{P_A - P_B}{\gamma} + z_A + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} - h_L$

$$\frac{P_A - P_B}{\gamma} = \frac{(700 - 125)\,\frac{kN}{m^2}}{9.81\,\frac{kN}{m^3}} = 58.6\,m$$

$$z_A = 1.8\,m$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{1.96 \times 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}(0.025\,m)^2} = 3.99\,m/s$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{1.96 \times 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}}{\frac{\pi}{4}(0.075\,m)^2} = 0.44\,m/s$$

$$\frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} = \frac{\left(3.99\,\frac{m}{s}\right)^2 - \left(0.44\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 9.81\,\frac{m}{s^2}} = 0.80\,m$$

$$h_L = 4\,N \cdot m/N$$

$$\therefore h_R = 58.6\,m + 1.8\,m + 0.80\,m - 4\,m = 57.2\,m$$

$$P_R = h_R \gamma Q = (57.2\,m)\left(9.81\,\frac{kN}{m}\right)\left(1.92 \times 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}\right)$$

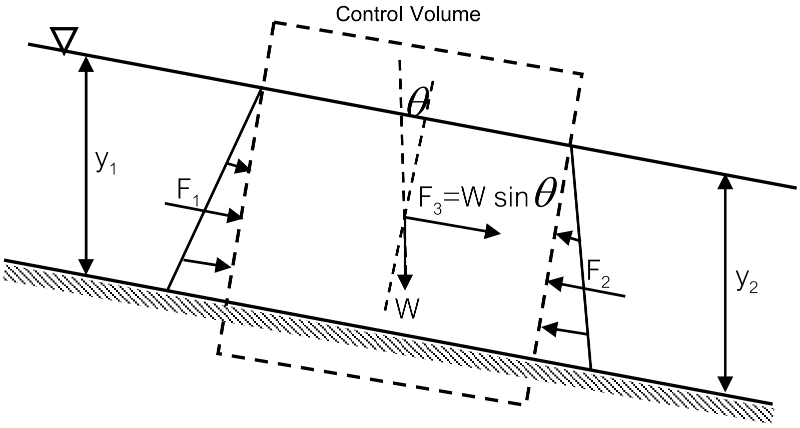
$$P_R = 1{,}080\,N \cdot m/s = 1.08\,kW$$ ตอบ

เนื่องจากมอเตอร์มีประสิทธิภาพ = 85%

$$\therefore \text{ กำลังงานที่ออกมา } = \left(\frac{85}{100}\right)(1.08\,kW) = 0.92\,kW$$ ตอบ

3.6 **สมการโมเมนตัมเชิงเส้น** (Linear Momentum Equation)

หลักการของโมเมนตัมมีประโยชน์ในการแก้ปัญหาการไหลที่มีแรงกระทำเข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งแรงกระทำจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและทิศทางของความเร็วในการไหล การสร้างสมการโมเมนตัมทำได้โดยเริ่มจากกฎข้อที่สองของนิวตัน กล่าวคือ



ภาพที่ 3.6 สมการโมเมนตัมของของไหล

จาก $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{m\vec{v_2} - m\vec{v_1}}{\Delta t}$

จากภาพที่ 3.6 $\vec{F_1} - \vec{F_2} + \vec{F_3} = \left(\dfrac{\gamma V}{g}\right)\left(\dfrac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{\Delta t}\right) = \dfrac{\gamma Q}{g}\left(\vec{v_2} - \vec{v_1}\right)\ \rho Q \Delta \vec{v}$

ดังนั้น สมการทั่วไปของโมเมนตัม คือ

$$\sum \vec{F} = \rho Q \Delta \vec{v} \tag{3.14}$$

$\sum \vec{F}$ จะมีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และ $\sum \vec{F}$ นี้เป็นแรงลัพธ์เชิงเวคเตอร์ที่กระทำต่อของไหล ครอบคลุมถึงน้ำหนักของของไหล แรงเฉือน และแรงเนื่องจากความดัน ตลอดจนแรงภายนอกทั้งหลายที่กระทำต่อของไหล จากสมการข้างต้น สามารถเขียนในรูปของปริมาณสเกลาร์ ได้ดังนี้

$$\sum F = \rho Q \Delta v$$

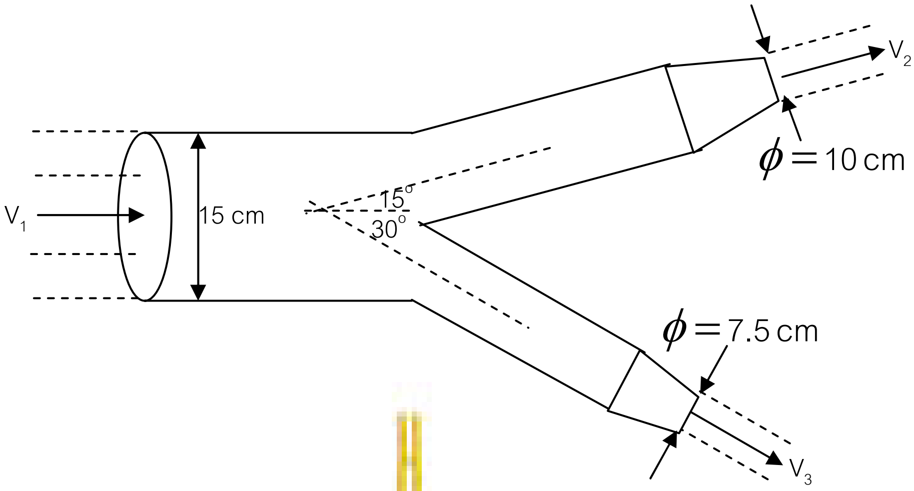
เมื่อ

$$\sum F_x = \rho_2 Q_2 v_{2x} - \rho_1 Q_1 v_{1x} = \rho Q\left(\Delta v_x\right)$$

$$\sum F_y = \rho_2 Q_2 v_{2y} - \rho_1 Q_1 v_{1y} = \rho Q\left(\Delta v_y\right)$$

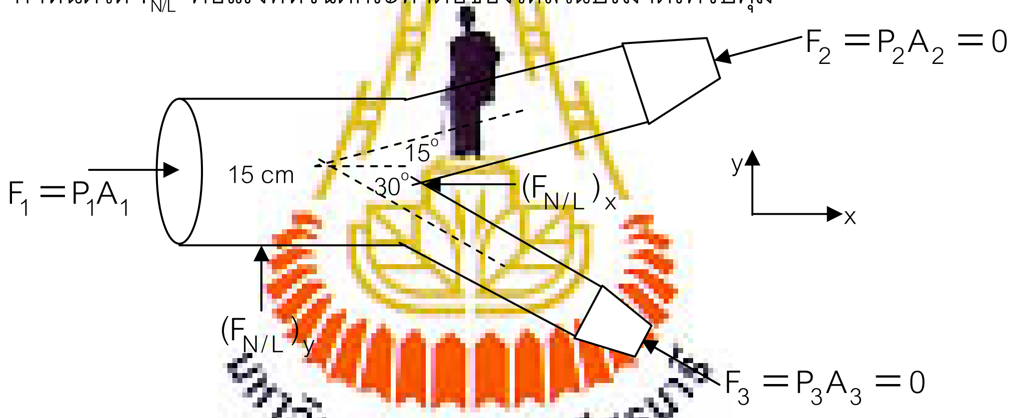
$$\sum F_z = \rho_2 Q_2 v_{2z} - \rho_1 Q_1 v_{1z} = \rho Q\left(\Delta v_z\right)$$

ตัวอย่าง 3.16 จงคำนวณหาขนาดและทิศทางของแรงที่น้ำกระทำต่อหัวฉีดคู่ ซึ่งวางอยู่ในแนวระนาบ ดังแสดงในภาพ กำหนดให้ ลำน้ำที่พุ่งออกจากหัวฉีดทั้งคู่มีความเร็ว 12 m/s เท่ากัน และสมมุติว่าไม่มีความฝืดใด ๆ ในระบบ



วิธีทำ

กำหนดให้ $F_{N/L}$ คือแรงที่หัวฉีดกระทำต่อของไหลในปริมาตรควบคุม



จากสมการต่อเนื่อง $Q_1 = Q_2 + Q_3$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 + A_3 v_3$$

$$\frac{\pi}{4}(0.15\,\mathrm{m})^2 v_1 = \frac{\pi}{4}(0.10\,\mathrm{m})^2\left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) + \frac{\pi}{4}(0.075\,\mathrm{m})^2\left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$v_1 = 8.33\,\mathrm{m/s}$$

$$Q_1 = \left(8.33\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{\pi}{4}(0.15\,\mathrm{m})^2\right) = 0.147\,\mathrm{m^3/s}$$

$$Q_2 = \left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{\pi}{4}(0.10\,\mathrm{m})^2\right) = 0.094\,\mathrm{m^3/s}$$

$$Q_3 = \left(12\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(\frac{\pi}{4}(0.075\,\mathrm{m})^2\right) = 0.053\,\mathrm{m^3/s}$$

สมการเบอร์นูลลี่ จากจากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$

แทนค่า $$\frac{P_1}{\gamma}+\frac{\left(8.33\frac{m}{s}\right)^2}{2\times 9.81\frac{m}{s^2}}=\frac{\left(12\frac{m}{s}\right)^2}{2\times 9.81\frac{m}{s^2}}$$

$$\frac{P_1}{\gamma}=3.8\,m$$

$$P_1=(3.8\,m)\left(9.81\frac{kN}{m^3}\right)=37.3\,kN/m^2$$

$$F_1=P_1A_1=656\,N$$

จากสมการโมเมนตัมในแนวแกน x

$$F_1-F_{(N/L)_x}=\left(\rho Q_2v_{2x}+\rho Q_3v_{3x}\right)-\rho Q_1v_{1x}$$

$$v_{2x}=v_2\cos 15^o=\left(12\frac{m}{s}\right)\cos 15^o=11.7\,m/s$$

$$v_{3x}=v_3\cos 30^o=\left(12\frac{m}{s}\right)\cos 30^o=10.4\,m/s$$

$$v_{1x}=v_1=8.33\,m/s$$

จะได้

$$656\,N-F_{(N/L)_x}=\left[\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.094\frac{m^3}{s}\right)\left(11.7\frac{m}{s}\right)\right]+\left[\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.053\frac{m^3}{s}\right)\left(10.4\frac{m}{s}\right)\right]$$
$$-\left[\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.147\frac{m^3}{s}\right)\left(8.33\frac{m}{s}\right)\right]$$

$$F_{(N/L)_x}=656\,N-427\,N=229\,N\leftarrow$$

จากสมการโมเมนตัมในแนวแกน y

$$F_{(N/L)_y}=\left(\rho Q_2v_{2y}+\rho Q_3v_{3y}\right)-\rho Q_1v_{1y}$$

$$v_{2y}=v_2\sin 15^o=\left(12\frac{m}{s}\right)\sin 15^o=3.1\,m/s$$

$$v_{3y}=-v_3\sin 30^o=-\left(12\frac{m}{s}\right)\sin 30^o=-6\,m/s$$

$$v_{1y}=0$$

จะได้

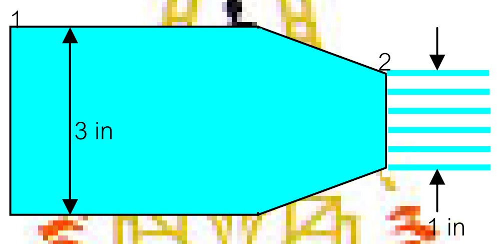
$$F_{(N/L)_y} = \left[\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.094\frac{m^3}{s}\right)\left(3.1\frac{m}{s}\right)\right] + \left[\left(10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(0.053\frac{m^3}{s}\right)\left(-60\frac{m}{s}\right)\right] - 0$$

$$F_{(N/L)_y} = -26.6\,N = 26.6\,N\downarrow$$

แรงที่น้ำกระทำต่อหัวฉีดมีขนาดเท่ากับ แรงที่หัวฉีดกระทำต่อปริมาตรควบคุมของน้ำ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม หรือ $F_{(L/N)} = -F_{(N/L)}$ นั่นคือ

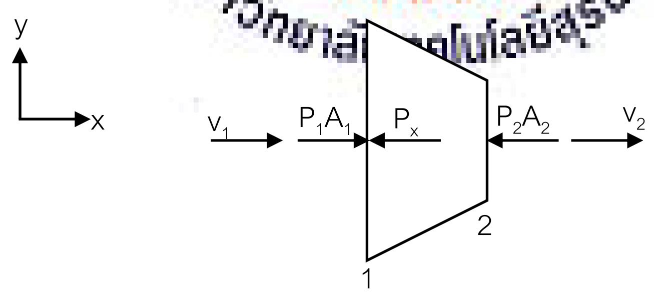
$F_{(L/N)_x} = 229\,N \rightarrow$ และ $F_{(L/N)_y} = 26.6\,N\uparrow$ <u>ตอบ</u>

ตัวอย่าง 3.17 จงคำนวณหาแรงที่หัวฉีดขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 in กระทำต่อท่อขนาด 3 in ที่ติดตั้งอยู่ในแนวระดับดังแสดงในภาพ กำหนดให้ ของไหลในท่อคือน้ำมัน ที่มีความถ่วงจำเพาะ 0.85 และความดันที่จุดที่ 1 มีค่า 6.9×10^5 Pa และไม่คิดค่าความสูญเสียใด ๆ



วิธีทำ

กำหนดให้ P_x คือ แรงที่หัวฉีดกระทำต่อท่อ



สมการเบอร์นูลลี่ จากจากจุด 1 ไปยังจุด 2; $\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$

แทนค่า $$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \quad (1)$$

จากสมการต่อเนื่อง $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$A_1 = \frac{\pi}{4}\left(3\,\text{in} \times 0.0254\frac{\text{m}}{\text{in}}\right)^2 = 4.56 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}\left(1\,\text{in} \times 0.0254\frac{\text{m}}{\text{in}}\right)^2 = 4.42 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$$

$$v_1 = \frac{A_2 v_2}{A_1} = \frac{\left(\frac{\pi}{4}(1\,\text{in})^2\right)v_2}{\left(\frac{\pi}{4}(3\,\text{in})^2\right)} = \frac{v_2}{9}$$

แทนค่า $v_1 = \frac{v_2}{9}$ ในสมการที่ (1)

$$\frac{6.9 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{9.81\frac{\text{kN}}{\text{m}^3}} + \frac{\left(\frac{v_2}{9}\right)^2}{2 \times 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{v_2^2}{2 \times 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$v_2 = 37.4\,\text{m/s}$$

$$v_1 = 4.16\,\text{m/s}$$

ดังนั้น $Q = Av = \left(4.56 \times 10^{-3}\,\text{m}^2\right)\left(4.16\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 0.019\,\text{m}^3/\text{s}$

จากสมการโมเมนตัมในแนวแกน x

$$P_1A_1 - P_2A_2 - P_x = (\rho Q v_{2x}) - (\rho Q v_{1x}) = \rho Q(v_{2x} - v_{1x})$$

แทนค่า

$$\left(6.9 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)\left(4.56 \times 10^{-3}\,\text{m}^2\right) - P_x = \left(0.85 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(0.019\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)\left(37.4 - 4.16\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

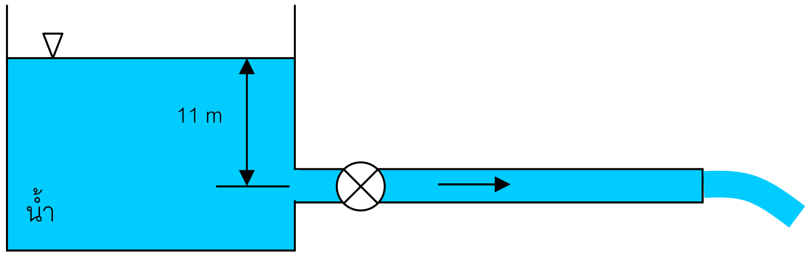
$$P_x = 2.61\text{kN}$$

ตอบ

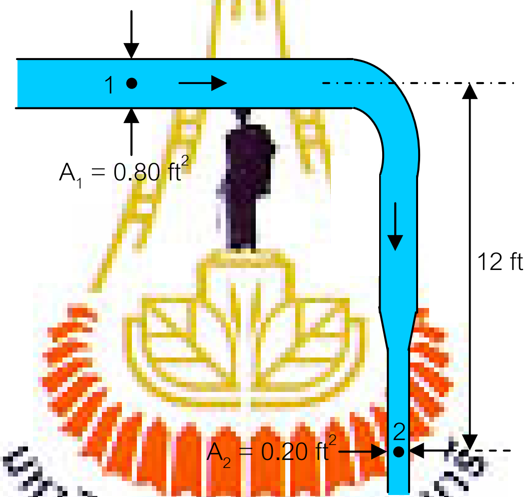
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

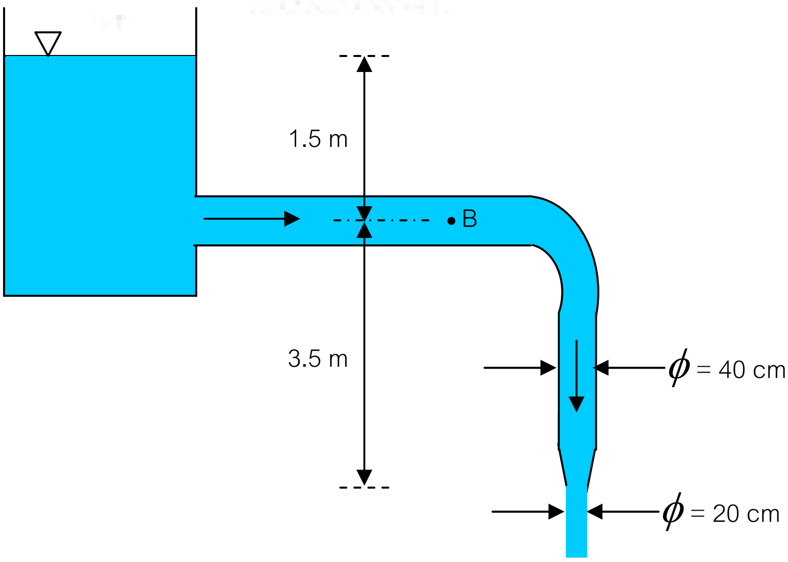
1. จากภาพ เมื่อระบบนี้มีการสูญเสียพลังงาน $h_L = \frac{10v^2}{2g}$ เมื่อ v คือ ความเร็วของของไหลในท่อ ท่อมีพื้นที่หน้าตัด 5 cm^2 และระดับน้ำเหนือแนวท่อคือ 11 m จงคำนวณหาอัตราการไหลที่ออกจากท่อ



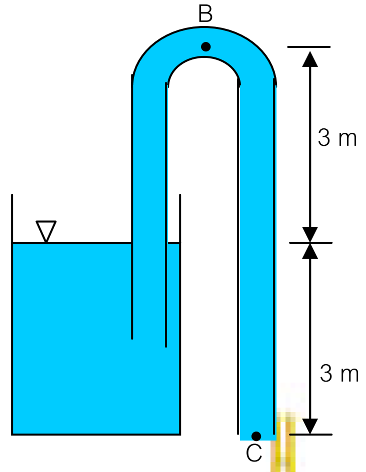
2. แกสโซรีนที่มีความถ่วงจำเพาะ 0.8 ไหลในระบบท่อดังภาพ ด้วยอัตราการไหล 5 cfs จงคำนวณหาความดันที่หน้าตัด 2 เมื่อความดันเกจที่หน้าตัด 1 เท่ากับ 10 psi และการสูญเสียพลังงานเท่ากับ 4 ft



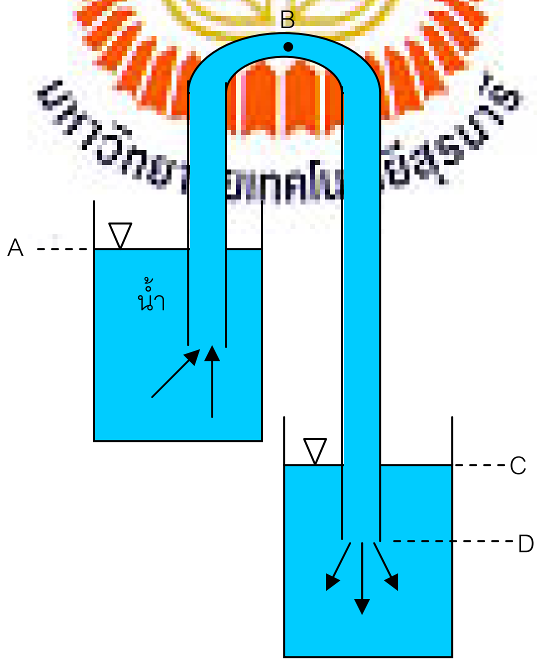
3. จงคำนวณหาอัตราการไหลและความดันที่จุด B เมื่อไม่คิดการสูญเสียพลังงาน



4. ระบบกาลักน้ำ มีอัตราการไหล 2.80 cfs ในท่อขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 8 in จงคำนวณหาการสูญเสียพลังงานตั้งแต่ผิวอ่างเก็บน้ำจนถึงจุด C และคำนวณหาความดันที่จุด B ถ้า 2 ใน 3 ของการสูญเสียพลังงานทั้งหมดเกิดขึ้นจากผิวอ่างเก็บน้ำจนถึงจุด B

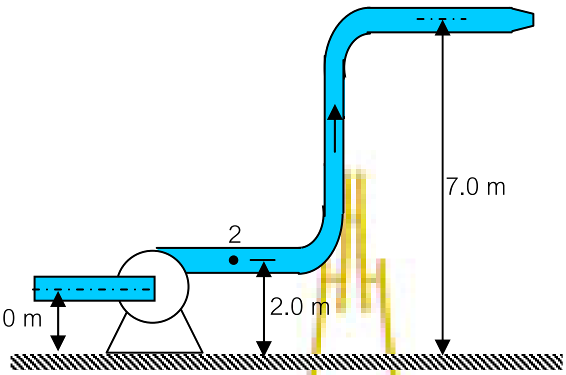


5. ระบบกาลักน้ำ ค่าระดับของ A B C และ D คือ 30 m 32 m 27 m และ 16 m ตามลำดับ การสูญเสียพลังงานตั้งแต่จุดทางเข้าจนถึงจุด B คือ $\frac{3}{4}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ และการสูญเสียพลังงานตั้งแต่จุด B จนถึงจุดทางออก คือ $\frac{1}{4}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ จงคำนวณหาอัตราการไหลและความดันที่จุด B เมื่อท่อมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 cm

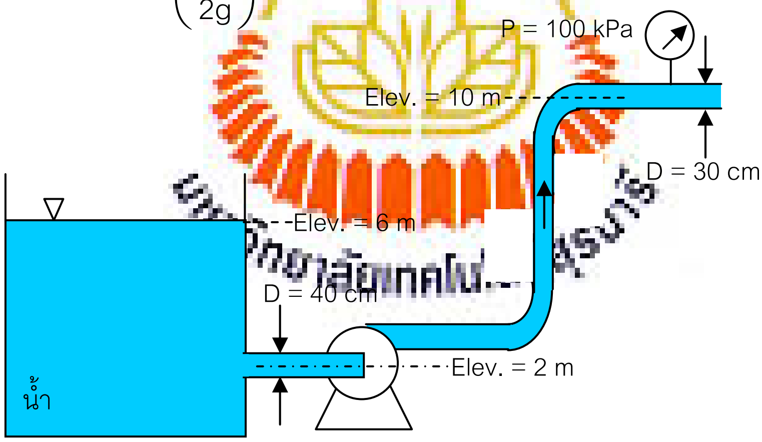


6. จากภาพในข้อ 5 เมื่อจุด B อยู่เหนือพื้นอ่างเก็บน้ำตัวบน 10 m การสูญเสียพลังงานตั้งแต่จุด A ถึงจุด B คือ $2\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ และท่อมีพื้นที่หน้าตัด 10^{-4} m^2 เมื่ออัตราการไหลเท่ากับ 7×10^{-4} m^3/s ความดันที่จุด B เท่ากับ 1.23 kPa และความดันบรรยากาศ เท่ากับ 100 kPa จงคำนวณความลึกของอ่างเก็บน้ำตัวบน

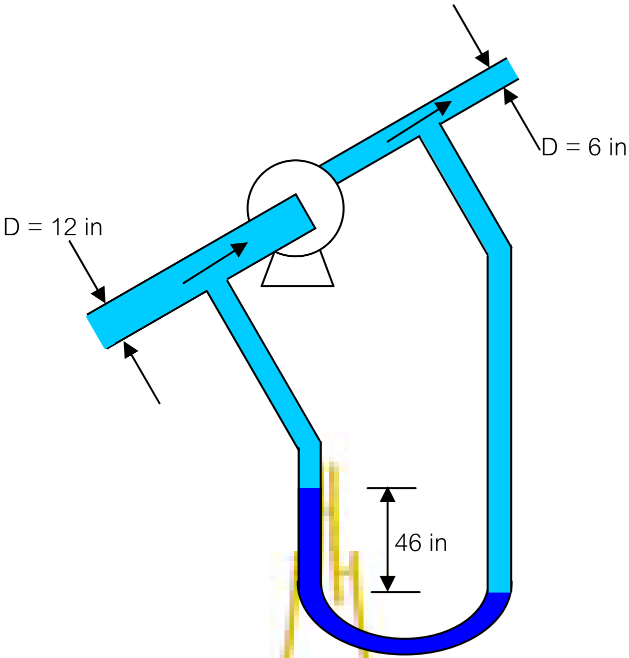
7. จากภาพ อัตราการไหลของน้ำ 0.20 m^3/s ท่อมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 30 cm หัวฉีดขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 15 cm เมื่อไม่คิดการสูญเสียพลังงาน จงคำนวณหาเฮดความดันที่จุด 2



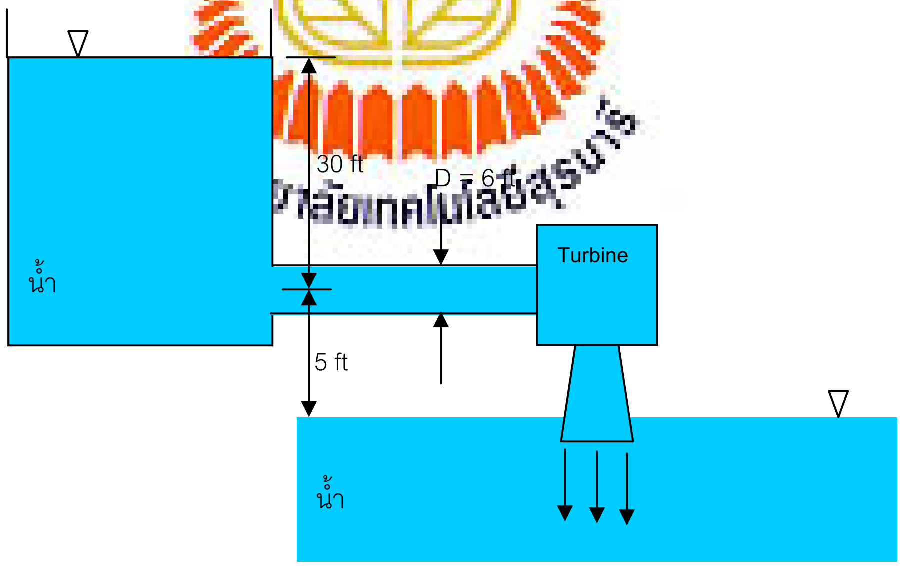
8. น้ำไหลจากอ่างเก็บน้ำเข้าสู่ระบบปั้มดังภาพ ด้วยอัตราการไหล 0.25 m^3/s และมีการสูญเสียพลังงานเท่ากับ $2\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ จงคำนวณหากำลังที่เกิดจากปั้ม



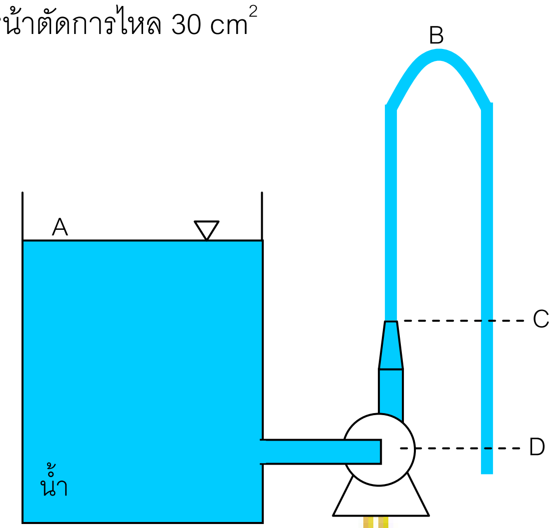
9. จากภาพ เมื่ออัตราการสูบน้ำมัน (S = 0.88) เท่ากับ 5 cfs จงคำนวณหากำลังม้าที่ปั๊มจะต้องส่งให้ ถ้าความแตกต่างของมานอมิเตอร์แบบปรอทอ่านค่าได้ 46 in



10. ถ้าอัตราการไหลเท่ากับ 250 cfs จงคำนวณหากำลังงานที่ได้จากเทอร์ไบร์ เมื่อเทอร์ไบร์มีประสิทธิภาพ 80% และการสูญเสียพลังงานทั้งหมดเท่ากับ $1.5\left(\frac{V^2}{2g}\right)$



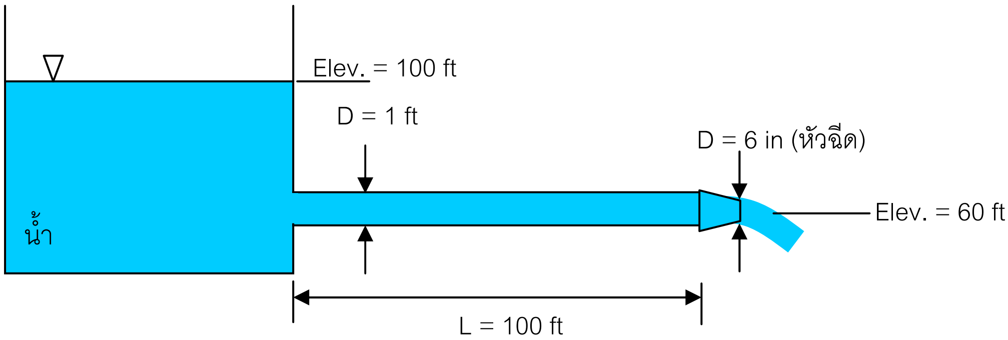
11. เมื่อไม่คิดการสูญเสียพลังงาน จงคำนวณหากำลังงานที่ปั้มจะต้องส่งให้น้ำไหลขึ้นดังภาพ กำหนดให้จุด A B C และ D มีค่าระดับความสูง 40 m 65 m 35 m และ 30 m ตามลำดับ และหัวฉีดมีพื้นที่หน้าตัดการไหล 30 cm^2



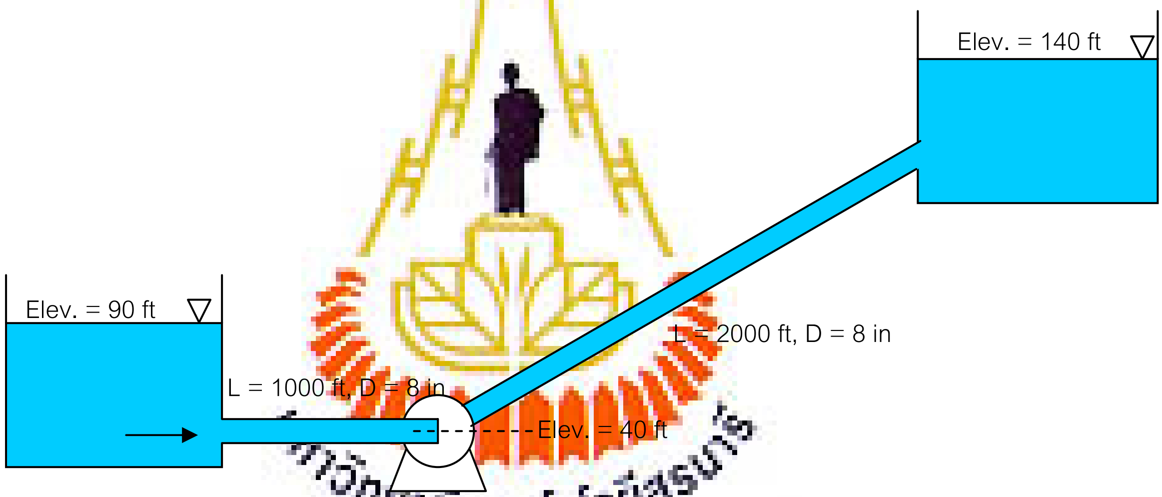
12. จากภาพข้อ 11 เมื่อไม่คิดการสูญเสียพลังงาน จงคำนวณหากำลังงานที่ปั้มจะต้องส่งให้น้ำไหลขึ้นดังภาพ กำหนดให้จุด A B C และ D มีค่าระดับความสูง 110 ft 200 ft 110 ft และ 90 ft ตามลำดับ และหัวฉีดมีพื้นที่หน้าตัดการไหล 0.10 ft^2

13. จากภาพ ถังน้ำ A และ B ถูกเชื่อมติดกันด้วยท่อที่มีขนาดพื้นที่หน้าตัด 10 cm^2 และ 20 cm^2 เมื่อระดับน้ำของทั้งสองถังนี้ต่างกัน 10 m จงคำนวณหาอัตราการไหลระหว่างถังน้ำทั้งสองถังนี้ กำหนดให้ การสูญเสียพลังงานเกิดจากการขยายขนาดท่ออย่างทันทีและการไหลเข้าถัง B

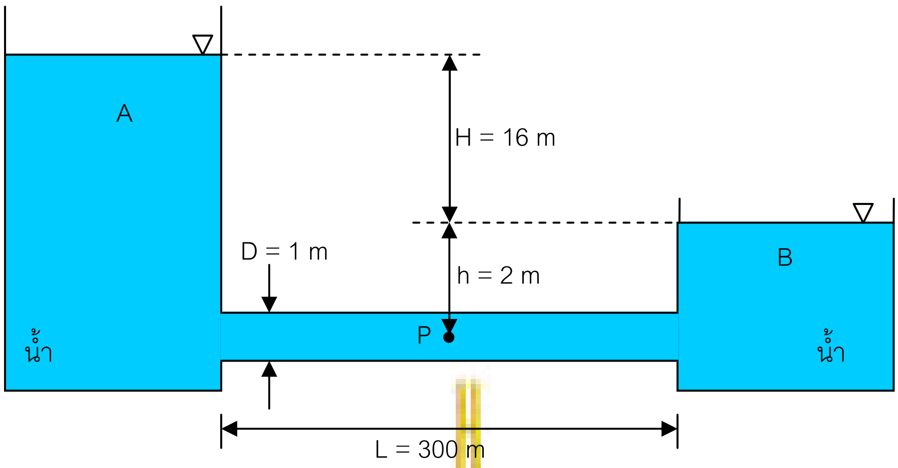
14. น้ำจากอ่างเก็บน้ำไหลผ่านท่อดังภาพ จงคำนวณหาอัตราการไหล กำหนดให้ ระบบมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.02(L/D)v^2/2g$ เมื่อ v คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหล



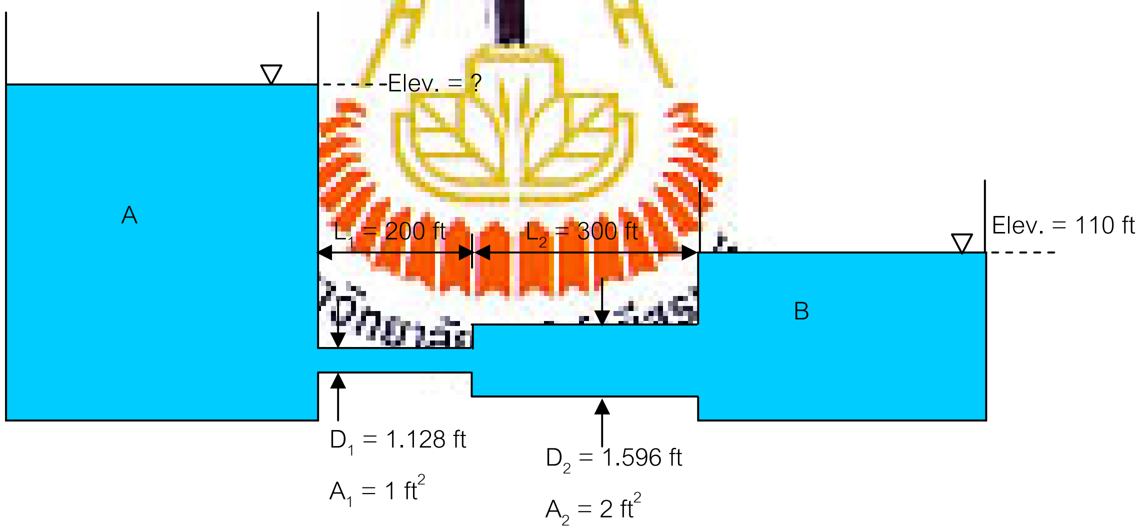
15. จงคำนวณหากำลังม้าจากปั้มที่จะต้องใช้เพื่อสูบน้ำด้วยอัตรา 2.5 cfs กำหนดให้ ระบบมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.015(L/D)v^2/2g$ เมื่อ v คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหล



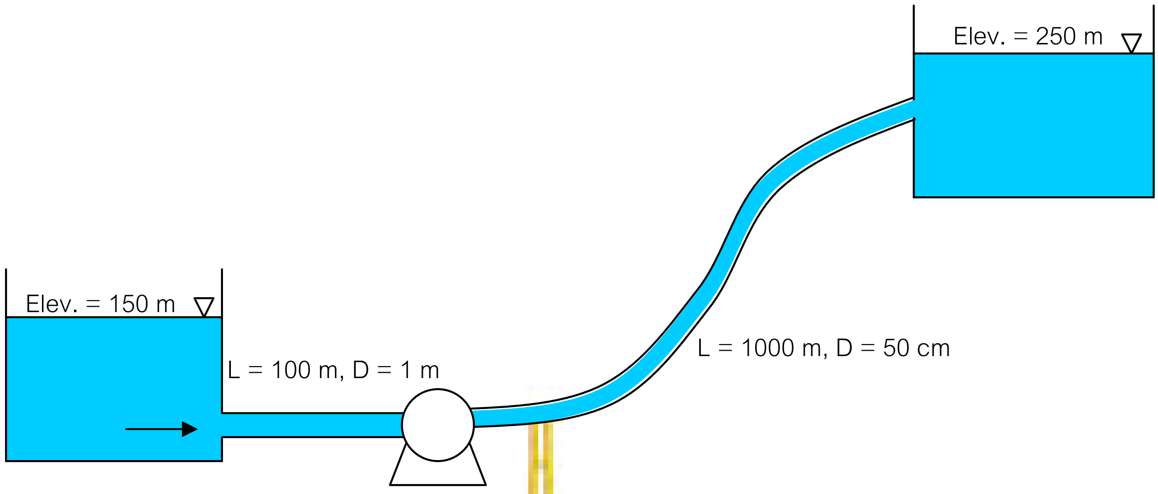
16. น้ำไหลจากถังน้ำ A ไปยังถังน้ำ B จงคำนวณหาอัตราการไหล และความดันที่จุด P ซึ่งอยู่ระหว่างกึ่งกลางทั้งสองถังน้ำ กำหนดให้ ระบบมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.01(L/D)v^2/2g$ เมื่อ v คือ ความเร็วเฉลี่ยของการไหล



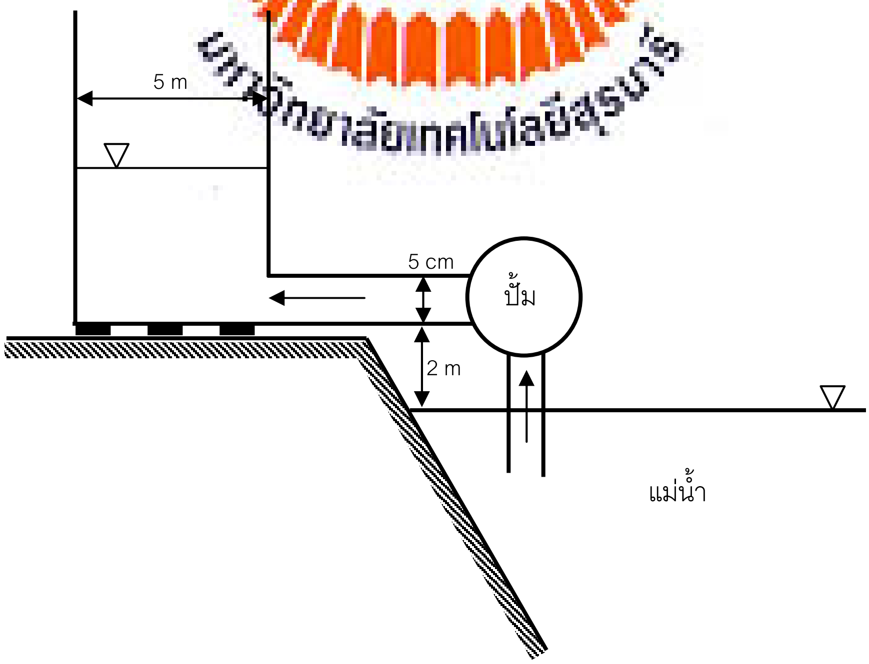
17. น้ำไหลจากถังน้ำ A ไปยังถังน้ำ B ด้วยอัตราการไหล 16 cfs จงคำนวณหาค่าระดับของผิวน้ำของถัง A กำหนดให้ ระบบมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.02(L/D)v^2/2g$ เมื่อ v คือความเร็วเฉลี่ยของการไหล ซึ่งสมการนี้ใช้ได้กับท่อทั้งสองแบบในระบบ



18. จงคำนวณหากำลังม้าจากปั้มที่จะต้องใช้เพื่อสูบน้ำด้วยอัตรา 2 m^3/s กำหนดให้ ระบบมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.018(L/D)v^2/2g$ เมื่อ v คือความเร็วเฉลี่ยของการไหล ซึ่งสมการนี้ใช้ได้กับท่อทั้งสองแบบในระบบ และประสิทธิภาพของปั้มคือ 74%



19. ปั้มน้ำถูกนำมาสูบน้ำเพื่อเติมน้ำในถังขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 m จากแม่น้ำ ดังภาพ ผิวน้ำในแม่น้ำอยู่ต่ำลงมาจากตลิ่งที่วางถังน้ำ 2 m เมื่อท่อที่สูบน้ำมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 5 cm และมีการสูญเสียพลังงาน $h_L = 10v^2/2g$ เมื่อ v คือความเร็วเฉลี่ยของการไหล กำหนดให้ พลังงานที่ได้จากปั้มมีความผันแปรตามอัตราการไหล คือ $h_p = 20 - 5\times10^4 Q^2$ เมื่อ Q คือ อัตราการไหลที่มีหน่วย m^3/s และ h_p มีหน่วย m จงคำนวนหาว่าจะต้องใช้เวลานานเท่าไรในการเติมน้ำในถังให้ได้สูง 10 m



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

20. กำหนดให้ การสูญเสียพลังงาน $h_L = 0.014(L/D)v^2/2g$ เมื่อ D คือ เส้นผ่าศูนย์กลางท่อ และ L คือ ความยาวท่อ

(ก) จงหาอัตราการไหล

(ข) จงวาดเส้น HGL และ EGL ของทั้งระบบนี้

(ค) จงหาตำแหน่งที่เกิดความดันสูงสุด

(ง) จงหาตำแหน่งที่เกิดความดันต่ำสุด

(จ) จงคำนวณหาความดันสูงสุดและความดันต่ำสุดที่เกิดขึ้นในระบบนี้