การควบคุมอัตโนมัติในกระบวนการผลิตอาหาร
521314

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต

- การแปลงลาปลาซ
- ฟังก์ชันถ่ายโอน
- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัตต่าง ๆ
- แผนภาพบล็อกและกราฟการไหลของสัญญาณ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical model)

คือ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่มนุษย์สมมติขึ้น เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรในระบบพลวัต

- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ อาจจะอยู่รูปของ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation, ODE) สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation, PDE) โครงข่ายประสาท (neural network) ฯลฯ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต

- แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเชิงเส้น (linear systems) ส่วนใหญ่จะอยู่รูปของ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ODE)

- ถ้าอธิบายพฤติกรรมของระบบพลวัตในโดเมนความถี่เชิงซ้อน s (Laplace) จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า ฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function)

- ถ้าอธิบายพฤติกรรมของระบบพลวัตในโดเมนเวลา จะได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า แบบจำลองตัวแปรสถานะ(state-variable model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต

ระบบเชิงเส้น vs ระบบไม่เป็นเชิงเส้น (linear vs nonlinear systems)

ระบบเชิงเส้น คือ ระบบที่ตัวแปรต้นมีกำลังเท่ากับหนึ่ง เช่น

$$y = ax + b \qquad \frac{dx}{dt} + x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

ระบบไม่เชิงเส้น คือ ระบบที่ตัวแปรต้นมีกำลังมากกว่าหนึ่ง เช่น

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A\sin\omega t$$

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบพลวัต

ระบบเชิงเส้นแบบไม่แปรผันตามเวลา (linear time-invariant systems)

คือ ระบบเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์มีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น ระบบปรับอากาศในห้อง ระบบควบคุมความชื้นของเมล็ดพืชในเครื่องอบแห้ง ฯลฯ

$$y = ax + b \qquad a\frac{dx}{dt} + bx = 1 \quad ; a, b = \text{constant}$$

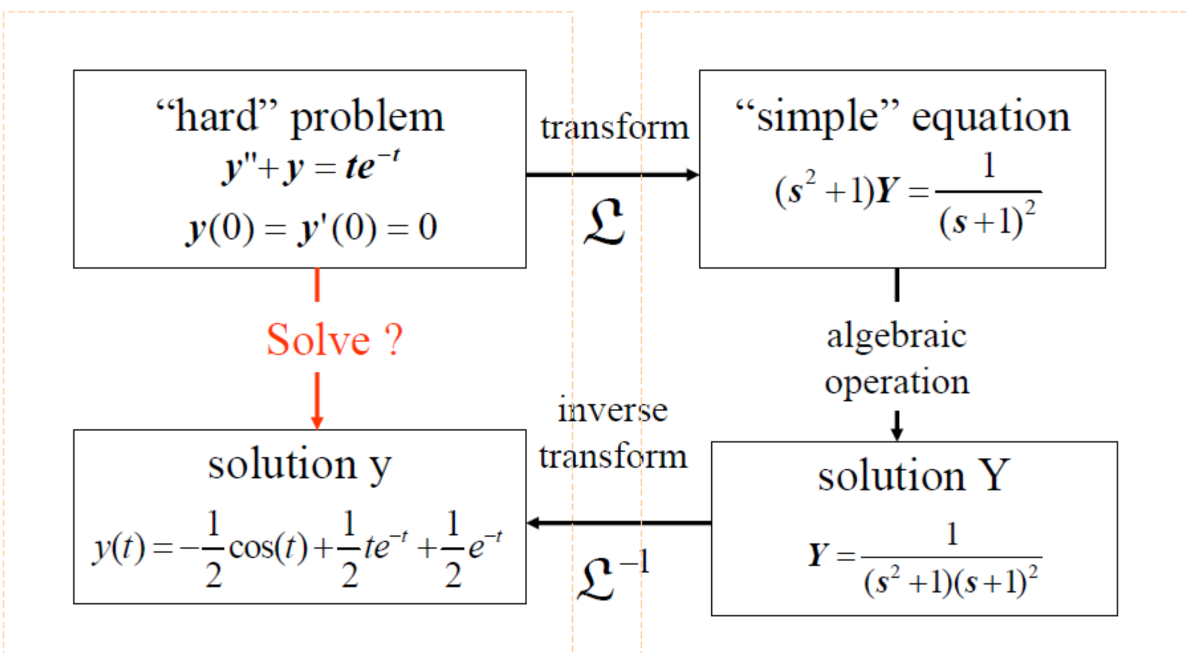
ระบบเชิงเส้นแบบแปรผันตามเวลา (linear time-variant systems)

คือ ระบบเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์มีค่าไม่คงที่ เปลี่ยนแปลงตามเวลา เช่น ระบบควบคุมของยานอวกาศ (น้ำหนักของยานเปลี่ยนแปลงตามการใช้เชื้อเพลิง)

การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform)

เป็น การแปลงฟังก์ชันในโดเมนเวลา f(t) ไปอยู่ในโดเมนความถี่เชิงซ้อน โดยมี s เป็นตัวแปรเชิงซ้อน (complex variable) เพื่อลดความยุ่งยากในการหาผลเฉลยของ f(t) $s = \sigma + j\omega, j = \sqrt{-1}$



การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซของ f(t) คือ

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

การแปลงกลับลาปลาซของ F(s) คือ

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

ภาคผนวก ข.

ตารางคู่การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซของ ODE

สมมติ สมการของระบบพลวัตแบบ SISO

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+7y(t)=3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

ตาราง ก.2

มีผลการแปลงลาปลาซ เมื่อพิจารณาว่าค่าเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ คือ

$$s^2Y(s)+4sY(s)+7Y(s)=3sX(s)+2X(s)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน

ฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function)

คือ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปอัตราส่วนระหว่าง output กับ input ใน s โดเมน (เมื่อเงื่อนไขเริ่มต้นของตัวแปรทุกตัวเป็นศูนย์) นั่นคือ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

สมมติ ผลการแปลงลาปลาซของระบบพลวัต โดยมี x(t) เป็น input และ y(t) เป็น output ดังนี้ คือ

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 7Y(s) = 3sX(s) + 2X(s)$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอน เป็น

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s+2}{s^2+4s+7}$$

ฟังก์ชันถ่ายโอน

ตัวอย่าง 1 จงหาผลการแปลงลาปลาซและฟังก์ชันถ่ายโอนของ ODE เมื่อ x(t) เป็น input และ y(t) เป็น output

$$3\frac{d^3x(t)}{dt^3}+4\frac{dx(t)}{dt}+7x(t)=2y(t)$$

จะได้ผลการแปลงลาปลาซ

$$3s^3X(s)+4sX(s)+7X(s)=2Y(s)$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอน เป็น

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3s^3+4s+7}{2}$$

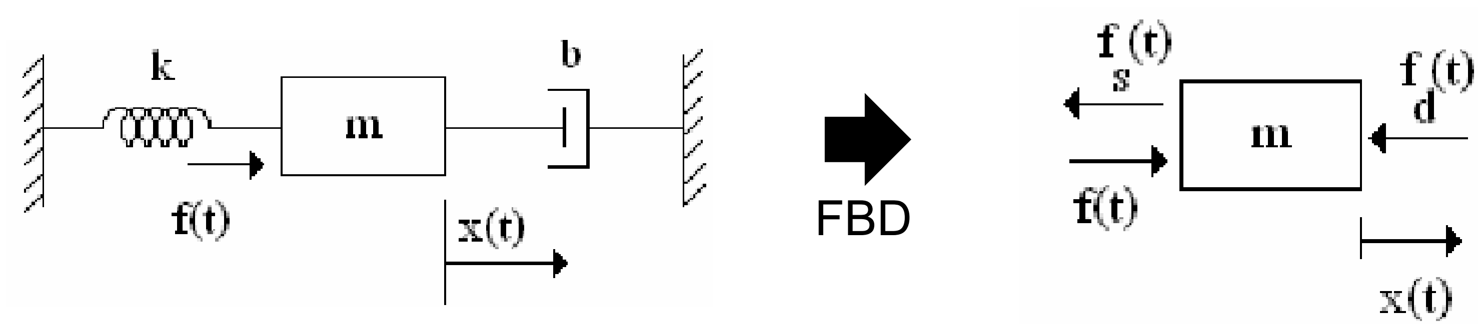
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

ระบบทางกล (mechanical system)

- มี 2 ประเภท คือ ระบบแบบไถล (translation system) และระบบแบบหมุน (rotation system)

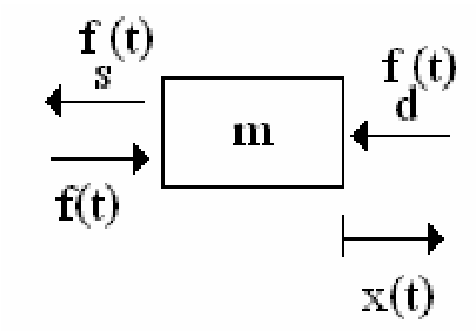
- ประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ 3 ส่วน คือ มวล (mass) สปริง (spring) และตัวหน่วง (damper)

ระบบทางกลแบบไถล



แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

มวล (mass) - แรงกระทำแปรผันตามความเร่ง



$$F = ma$$

$$f(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^t}$$

สปริง (spring) - แรงกระทำแปรผันตามการกระจัด

$$F = kx$$

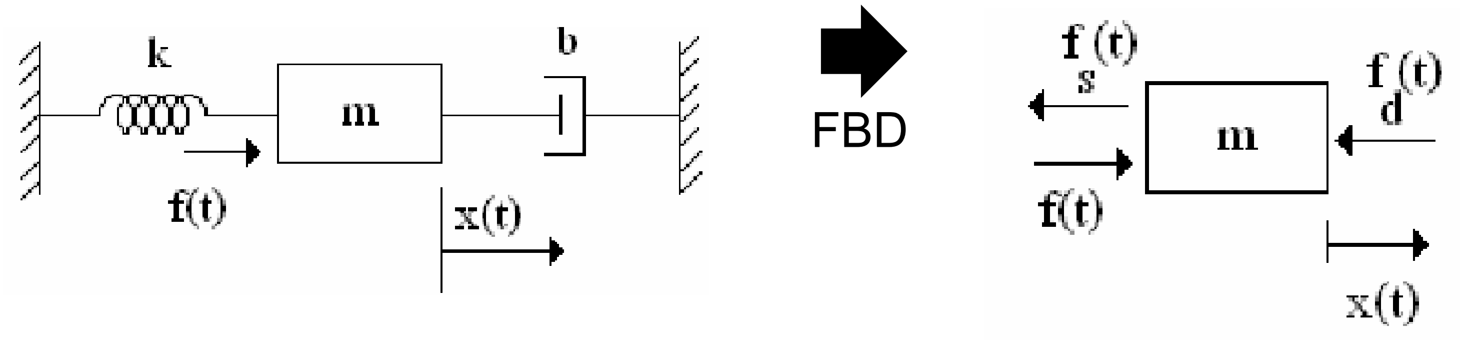
$$f_s(t) = kx(t)$$

ตัวหน่วง (damper) - แรงกระทำแปรผันตามความเร็ว

$$F = bv$$

$$f_d(t) = b\frac{dx(t)}{dt}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล



จากกฎของนิวตัน $\sum F = ma$

$$f(t) - f_d(t) - f_s(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$f(t) - b\frac{dx(t)}{dt} - kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

จะได้ สมการ ODE สำหรับระบบทางกลนี้ เป็น

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + b\frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

หาผลการแปลงลาปลาซและฟังก์ชันถ่ายโอนของ ODE เมื่อ f(t) เป็น input และ x(t) เป็น output

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

มีผลการแปลงลาปลาซ เมื่อพิจารณาว่าค่าเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ คือ

$$ms^2X(s)+bsX(s)+kX(s)=F(s)$$

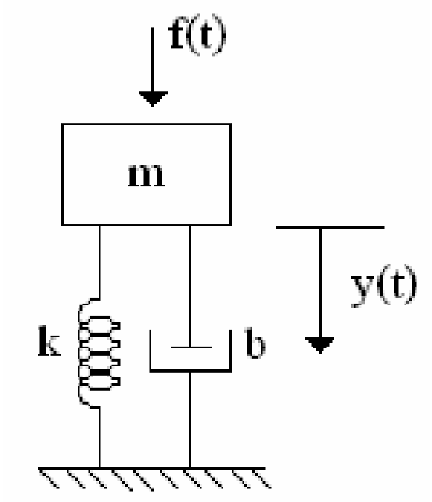
$$(ms^2+bs+k)X(s)=F(s)$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอน เป็น

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

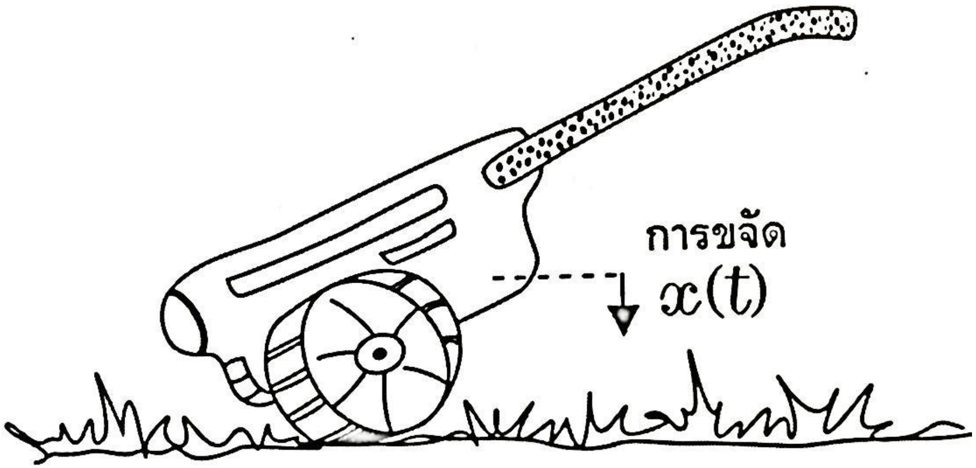
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

ตัวอย่างที่ 2 จงหาฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบทางกลต่อไปนี้



แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

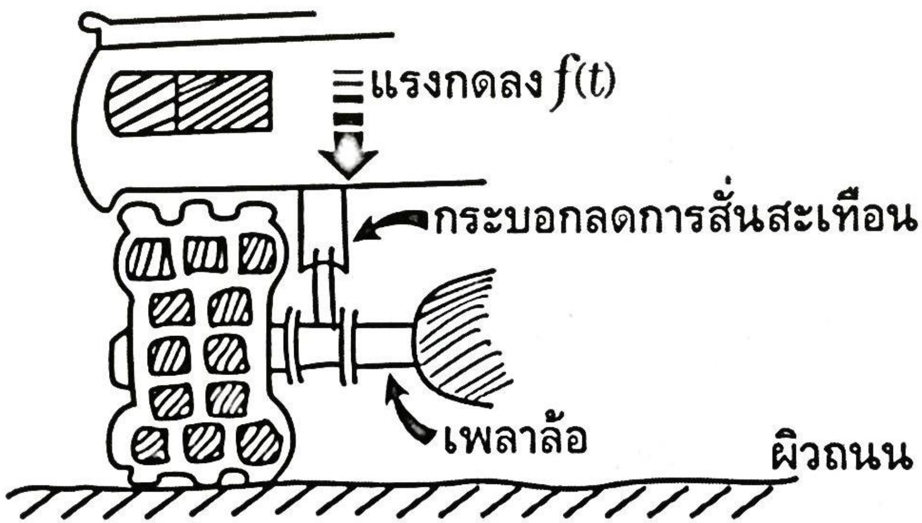
ตัวอย่างที่ 3 จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกล ต่อไปนี้



รูปที่ 2.6 รถไถเดินตาม

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

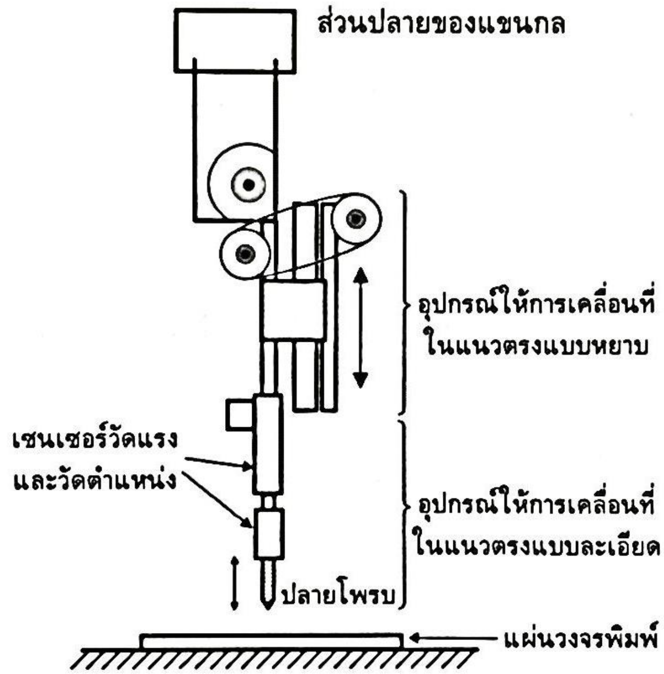
ตัวอย่างที่ 4 จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกลต่อไปนี้



รูปที่ 2.8 ส่วนตัดด้านหลังซ้ายของรถขับเคลื่อนสี่ล้อ

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

ตัวอย่างที่ 5 จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกล
ต่อไปนี้



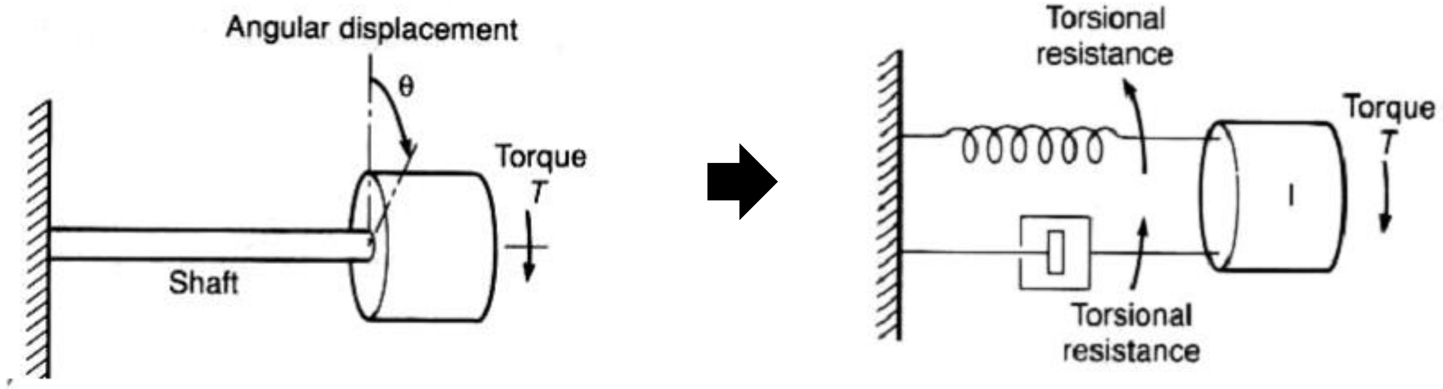
รูปที่ 2.10 ระบบหัววัดอิเล็กทรอนิกส์ขนาดจิ๋วอัตโนมัติ

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

ระบบทางกลแบบหมุน

- ประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ 3 ส่วน คือ มวล สปริงเชิงมุม และตัวหน่วงเชิงมุม

- พิจารณาการหมุนแทนการไถล โดย โมเมนต์บิด T(t) จะทำให้เกิดการขจัดเชิงมุม $\theta(t)$



แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

มวล - โมเมนต์บิดกระทำแปรผันตามความเร่งเชิงมุม

$$T = I\alpha$$

$$T(t) = I\,\frac{d^2\theta(t)}{dt^t}$$

สปริง - โมเมนต์บิดกระทำแปรผันตามการกระจัดเชิงมุม

$$T = k\theta$$

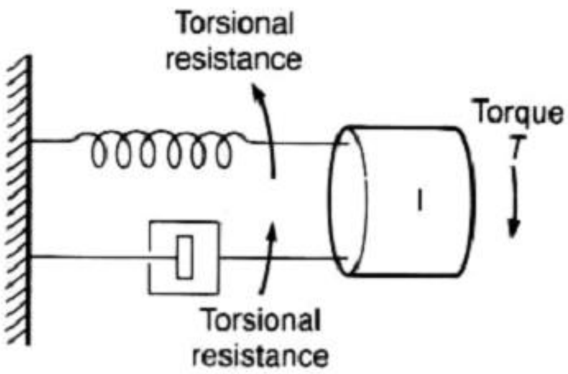
$$T_s(t) = k\theta(t)$$

ตัวหน่วง - โมเมนต์บิดกระทำแปรผันตามความเร็วเชิงมุม

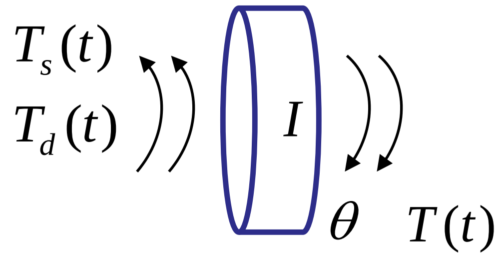
$$T = b\omega$$

$$T_d(t) = b\,\frac{d\theta(t)}{dt}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล



FBD



จากกฎของนิวตัน

$$\sum T = I\alpha$$

$$T(t) - T_d(t) - T_s(t) = I\alpha$$

$$T(t) - b\frac{d\theta(t)}{dt} - k\theta(t) = I\frac{d^2\theta(t)}{dt}$$

จะได้

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b\frac{d\theta(t)}{dt} + k\theta(t) = T(t)$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

หาผลการแปลงลาปลาซและฟังก์ชันถ่ายโอนของ ODE

เมื่อ T(t) เป็น input และ θ(t) เป็น output

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+b\frac{d\theta(t)}{dt}+k\theta(t)=T(t)$$

มีผลการแปลงลาปลาซ เมื่อพิจารณาว่าค่าเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์ คือ

$$Is^2\theta(s)+bs\theta(s)+k\theta(s)=T(s)$$

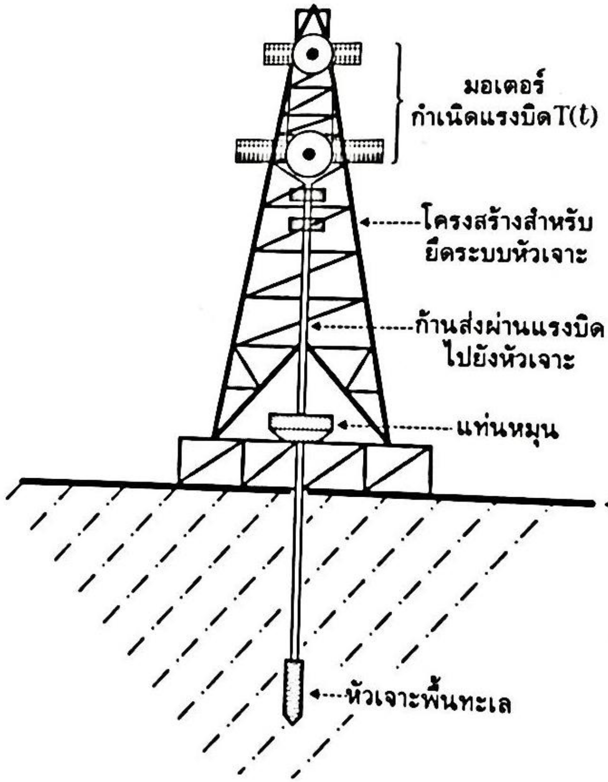
$$(Is^2+bs+k)\theta(s)=T(s)$$

จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอน เป็น

$$G(s)=\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1}{Is^2+bs+k}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

ตัวอย่างที่ 6 จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบทางกล ต่อไปนี้

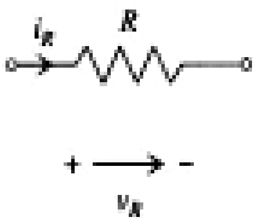


แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

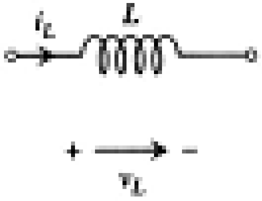
ระบบทางไฟฟ้า

- ประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ คือ แหล่งจ่ายแรงดัน/กระแส ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ

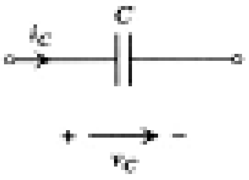
ความสัมพันธ์ระหว่าง แรงดัน (V) กับ กระแส (i) ในวงจรไฟฟ้า



$$v = iR \qquad i = \frac{v}{R}$$



$$v = L\frac{di}{dt} \qquad i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,dt$$



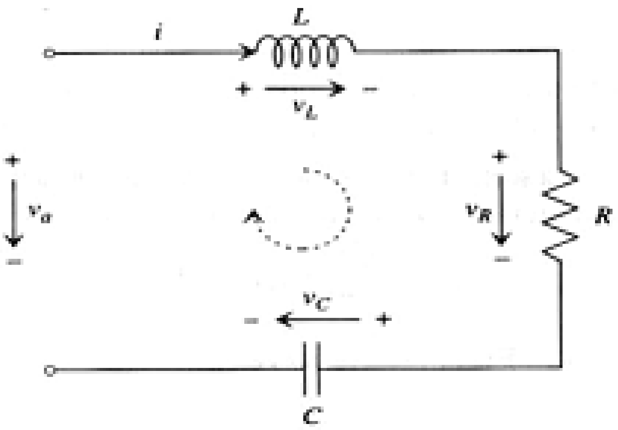
$$v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt \qquad i = C\frac{dv}{dt}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

ระบบทางไฟฟ้า

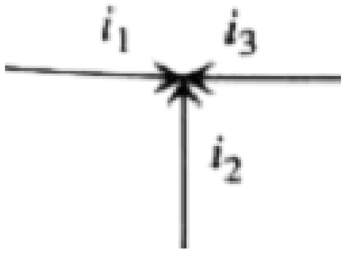
- การหาแบบจำลองฯ อาศัยกฎ 2 กฎ คือ กฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's voltage law/ KVL) และกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's current law/ KCL)

$$\sum v = 0$$



$$v_a - v_L - v_R - v_C = 0$$

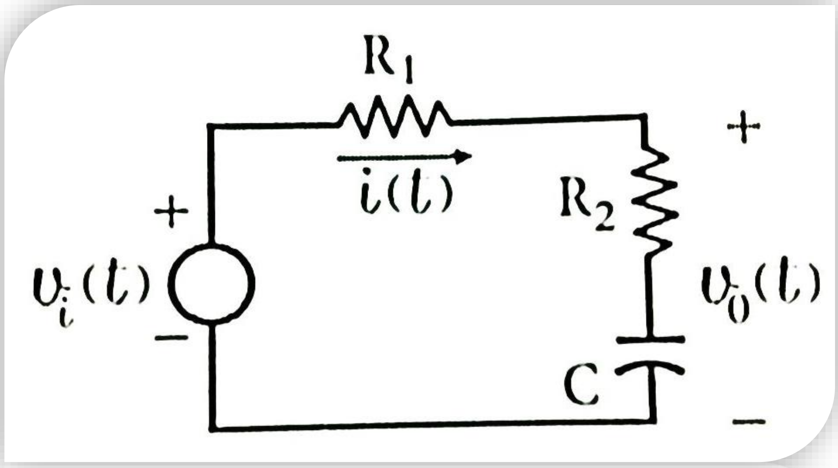
$$\sum i = 0$$



$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางกล

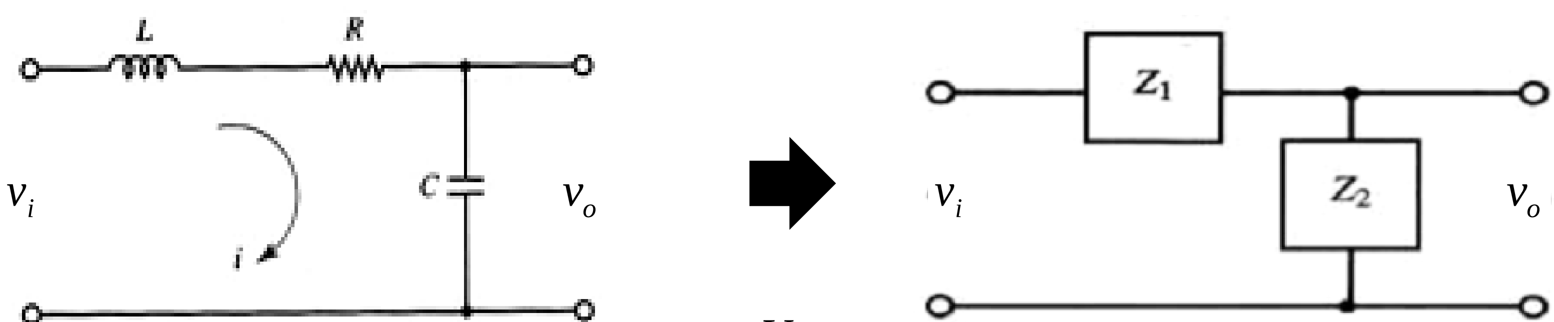
ตัวอย่างที่ 7 จงหาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบไฟฟ้าต่อไปนี้



แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

ระบบทางไฟฟ้า

- เขียนสมการของผลการแปลงโดยตรง ไม่ต้องเขียนสมการอนุพันธ์
- บางโอกาสอาจวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าด้วย อิมพีแดนซ์ (impedance, Z)
- อิมพีแดนซ์ เป็นการรวมส่วนประกอบของวงจรไฟฟ้า (ตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุ) ไว้ด้วยกัน เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์วงจร



$$Z = \frac{V}{I}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

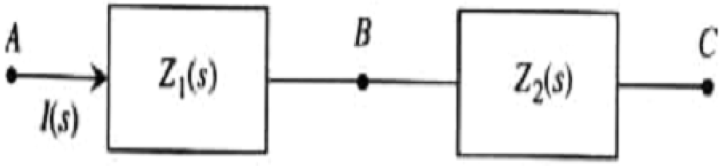
ผลการแปลงลาปลาซของอิมพีแดนซ์

อิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน $$Z_R(s) = \frac{V_R(s)}{I_R(s)} = R$$

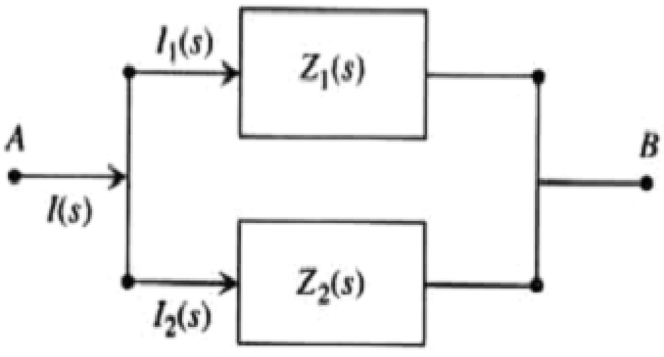
ตัวเหนี่ยวนำ $$Z_L(s) = \frac{V_L(s)}{I_L(s)} = Ls$$

ตัวเก็บประจุ $$Z_C(s) = \frac{V_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{Cs}$$

การรวมอิมพีแดนซ์ในวงจร



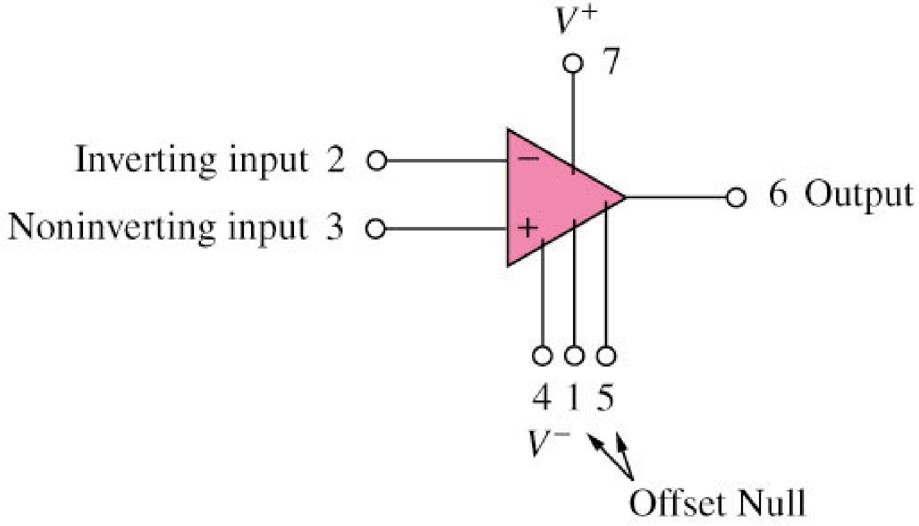
$$Z_{eq} = Z_1(s) + Z_2(s)$$



$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1(s)} + \frac{1}{Z_2(s)}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 8 จงหาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรออปแอมแบบอินทีเกรเทอร์ (integrator op-amp circuit)ในตัวอย่างที่ 2.2 ในหนังสือ



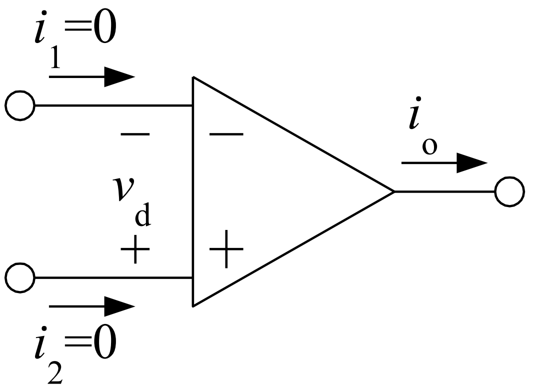
- เป็นอุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ 3 ขา ที่มีการทำงานคล้ายกับแหล่งจ่ายแรงดันที่ถูกควบคุมด้วยแรงดัน (Voltage-Controlled Voltage Source, VCVS)

- ออปแอมป์สามารถนำมาใช้ในการขยายสัญญาณ , รวมสัญญาณหรือนำมาทำเป็นตัวกระทำทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

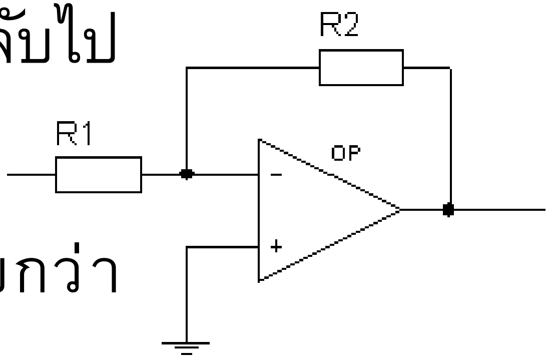
คุณสมบัติของออปแอมป์ในอุดมคติ

- อัตราขยายวงเปิดมีค่าเป็นอนันต์
- ความต้านทานอินพุตมีค่าเป็นอนันต์ $R_i \cong \infty$
- ความต้านทานเอาท์พุตมีค่าเป็นศูนย์ $R_o \cong 0$



การป้อนกลับแบบลบของออปแอมป์

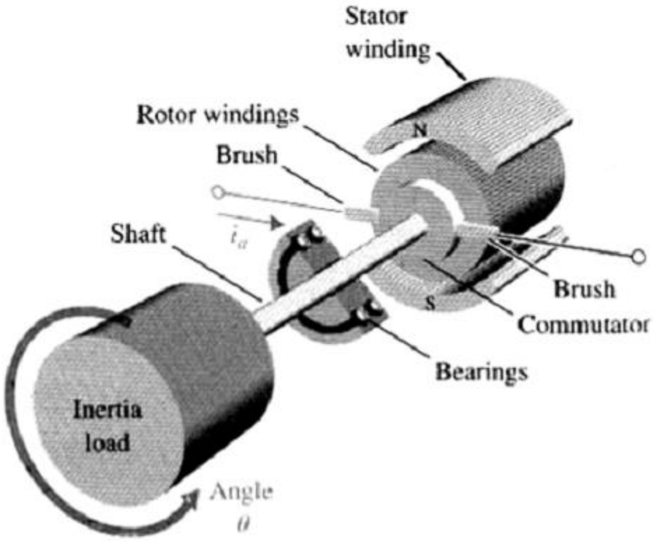
- เชื่อมต่อวงจรโดยนำสัญญาณจากขาเอาท์พุตต่อกลับไปยังขาอินพุตที่เป็นแบบ inverting ของออปแอมป์
- อัตราขยายที่เกิดจากการป้อนกลับแบบลบเรียกว่า อัตราขยายลูปปิด (closed-loop gain)

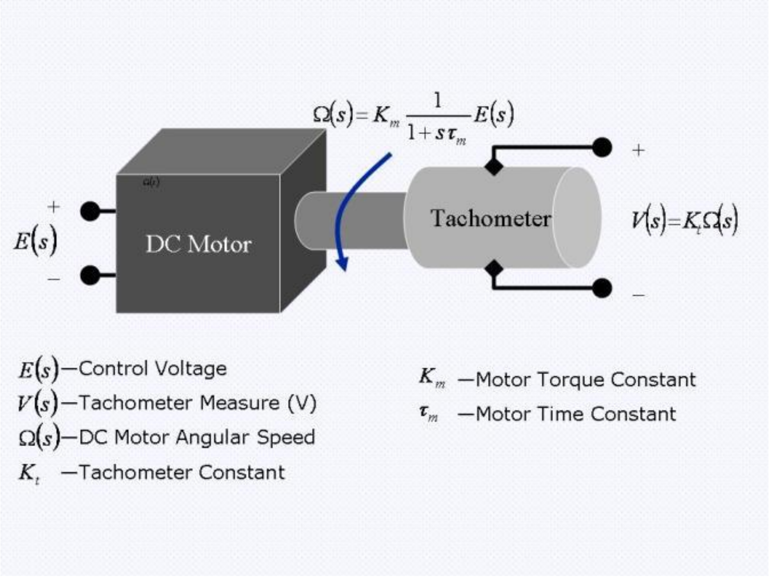


แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

ระบบทางกลไฟฟ้า (electromechanical systems)

- เป็นระบบพลวัตที่มีองค์ประกอบทางกล และทางไฟฟ้า ร่วมกัน เช่น มอเตอร์ไฟฟ้า Tachometer อุปกรณ์ที่เปลี่ยนไฟฟ้าเป็นกลหรือกลเป็นไฟฟ้า





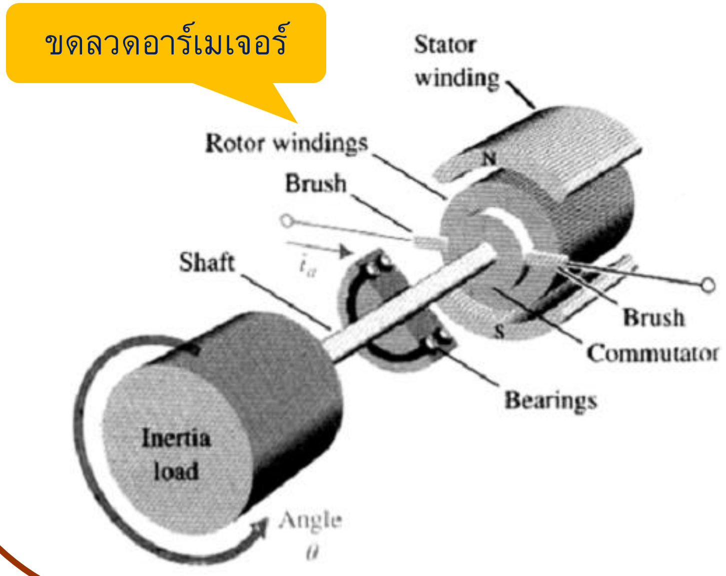
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

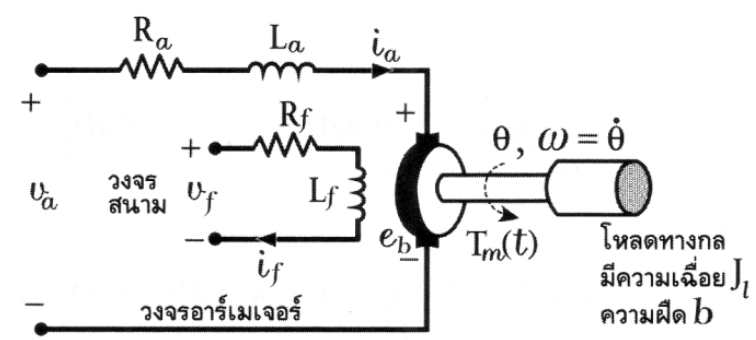
ตัวอย่างที่ 9 การควบคุมมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงในตัวอย่าง 2.8

แบ่งการควบคุมมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรงได้ 2 แบบ

- การควบคุมความเข้มสนาม (field control)

- การควบคุมความเข้มของวงจรอาร์เมเจอร์ (armature-voltage control)



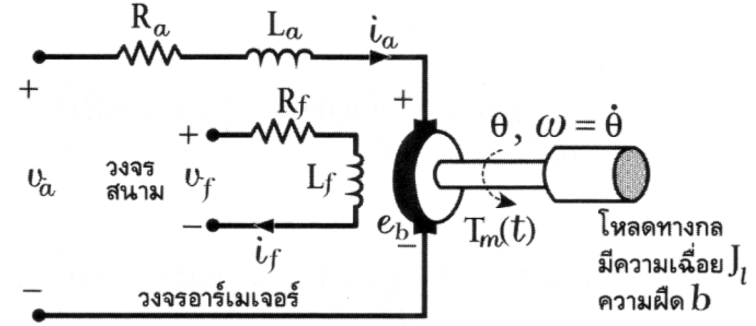


แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

การควบคุมความเข้มสนามของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

- กระแสอาร์เมเจอร์จะคงที่ (กระแสใน rotor)

- ความสัมพันธ์ของระบบทางกลไฟฟ้า คือ โมเมนต์บิด เป็นฟังก์ชันกับ กระแสไฟฟ้าในสนาม



$$T_m(t) = K_m i_f(t)$$

$$T_m(s) = K_m I_f(s)$$

หาค่า $T_m(s)$ และ $I_f(s)$

- **ระบบทางกล** (ไม่คิดค่าความยืดหยุ่น, k, ของเพลา)

$$T_m(t) - b\omega = I\alpha$$

$$T_m(s) = (Is^2 + bs)\theta(s)$$

- **ระบบทางไฟฟ้า** (วงจรสนาม)

$$V_f(s) = I_f(s) Z_f(s)$$

$$I_f(s) = \frac{V_f(s)}{Z_f(s)} = \frac{V_f(s)}{(R_f + sL_f)}$$

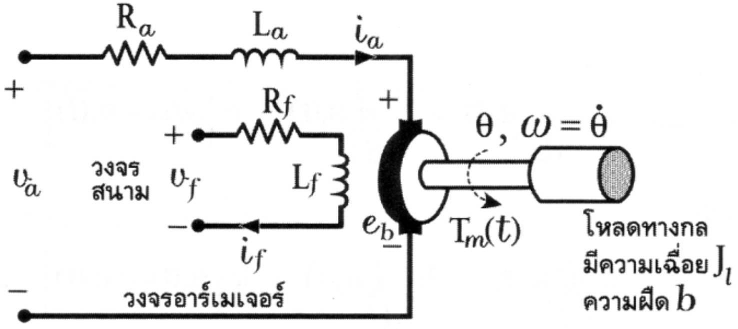
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

การควบคุมความเข้มสนามของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

$$T_m(s) = K_m I_f(s)$$

$$(Is^2 + bs)\theta(s) = K_m\left(\frac{V_f(s)}{R_f + sL_f}\right)$$

หาฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อให้ $V_f(s) = input; \theta(s) = output$

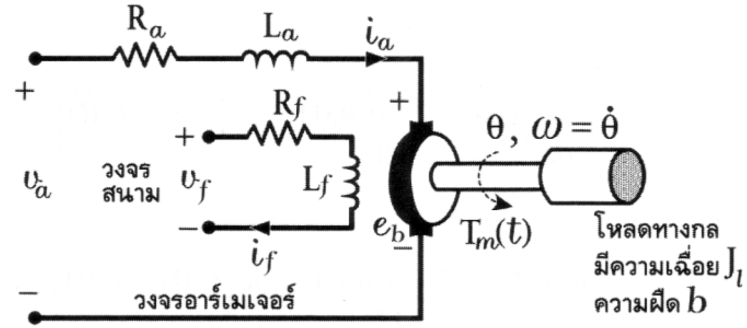


$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{(R_f + sL_f)(Is^2 + bs)}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

การควบคุมด้านวงจรอาร์เมเจอร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

- ความเข้มสนามจะถูกรักษาคงที่
- ความสัมพันธ์ของระบบทางกลไฟฟ้า คือ โมเมนต์บิด เป็นฟังก์ชันกับ กระแสไฟฟ้าในวงจรอาร์เมเจอร์



$$T_m(t) = K_\phi i_a(t)$$

$$T_m(s) = K_\phi I_a(s)$$

หาค่า $T_m(s)$ และ $I_a(s)$

- **ทางกล** (ไม่คิดค่าความยืดหยุ่น, k, ของเพลา)

$$T_m(t) - b\omega = I\alpha$$

$$T_m(s) = (Is^2 + bs)\theta(s)$$

-**ทางไฟฟ้า** (วงจรอาร์เมเจอร์) จะมีแรงเคลื่อนไฟฟ้าย้อนกลับเนื่องจากการเหนี่ยวนำ (back EMF) ซึ่งเป็นฟังก์ชันกับการหมุนของอาร์เมเจอร์

$$V_a(s) - E_b(s) = I_a(s)Z_a(s)$$

$$I_a(s) = \frac{V_a(s) - E_b(s)}{Z_a(s)} = \frac{V_a(s) - K_b\theta(s)}{(R_a + sL_a)}$$

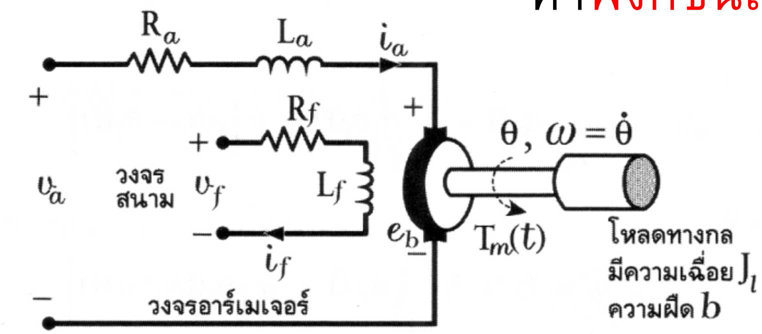
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

การควบคุมด้านวงจรอาร์เมเจอร์ของมอเตอร์ไฟฟ้ากระแสตรง

$$T_m(s) = K_\phi I_a(s)$$

$$(Is^2 + bs)\theta(s) = K_\phi\left(\frac{V_a(s) - K_b s\theta(s)}{R_a + sL_a}\right)$$

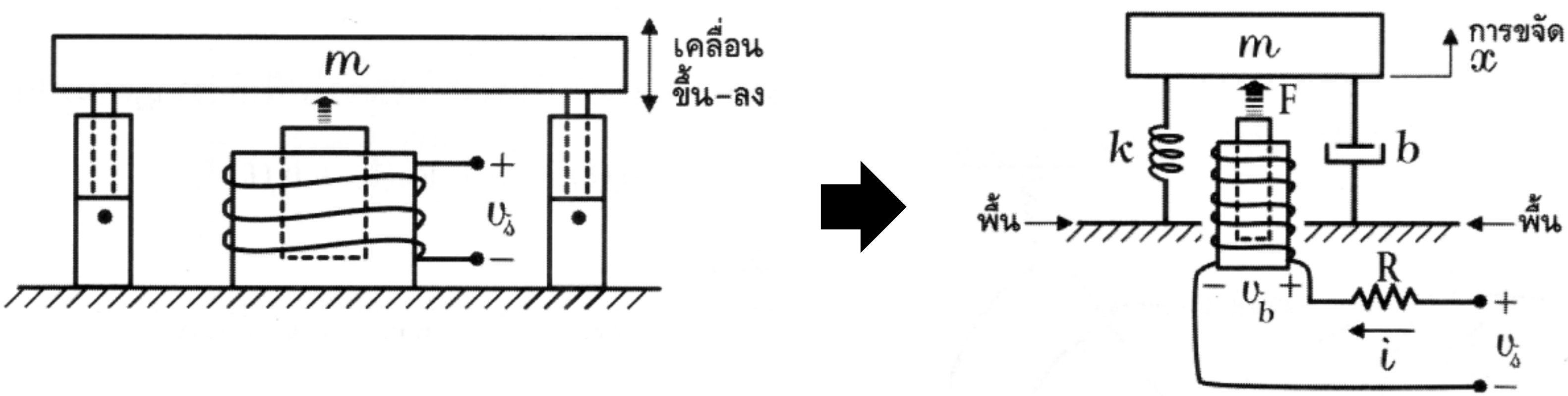
หาฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อให้ $V_a(s) = input; \theta(s) = output$



$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_\phi}{(R_a + sL_a)(Is^2 + bs) + K_\phi K_b s}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

ตัวอย่างที่ 10 จงหาฟังก์ชันถ่ายโอนของการควบคุมโต๊ะเขย่าของเหลวในตัวอย่างที่ 2.9 ในหนังสือ



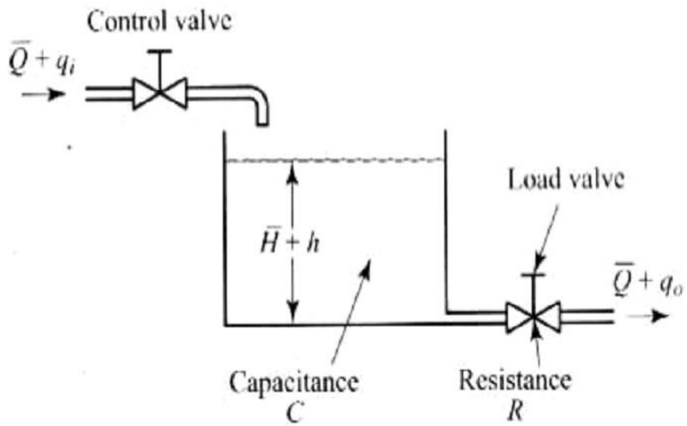
โต๊ะเขย่า

แรง F อยู่ในรูปฟังก์ชันของกระแส i

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบระดับของเหลว

ระบบระดับของเหลว (liquid-level systems)

- ประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ คือ ตัวต้านทานการไหล (resistance, R) และ ความจุ (capacitance, C)



$$R = \frac{\text{change in level difference, m}}{\text{change in flow rate, m}^3/\text{sec}}$$

$$C = \frac{\text{change in liquid stored, m}^3}{\text{change in head, m}}$$

- ค่า R ขึ้นอยู่กับรูปแบบการไหล

- ค่า C ขึ้นอยู่กับหน้าตัดของภาชนะ ดังนั้น ถ้าหน้าตัดของภาชนะคงที่ ค่า C จะคงที่ทุก ๆ ค่าเฮด

$\bar{Q}$ • อัตราการไหลในสภาวะคงตัว

q_i • ส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าน้อยของอัตราการไหลเข้า จากอัตราการไหลในสภาวะคงตัว

q_0 • ส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าน้อยของอัตราการไหลออก จากอัตราการไหลในสภาวะคงตัว

$\bar{H}$ • เฮดในสภาวะคงตัว

h • ส่วนเบี่ยงเบนที่มีค่าน้อยของเฮด จากเฮดในสภาวะคงตัว

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบระดับของเหลว

ค่า R ขึ้นอยู่กับรูปแบบการไหลของของเหลว

Laminar flow;

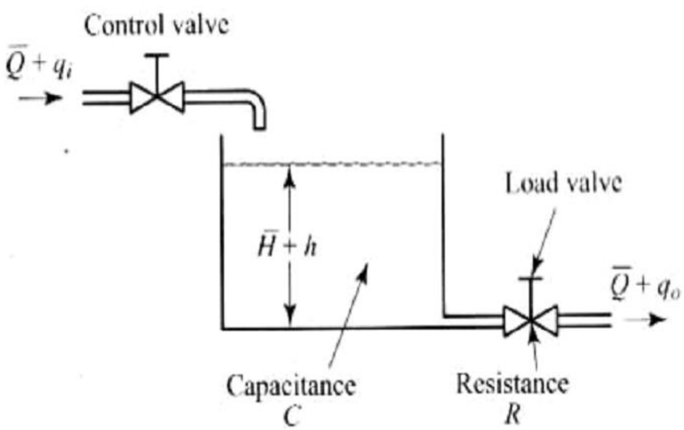
เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลกับเฮด ในภาวะคงตัว คือ $Q = KH$

เมื่อเขียน ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลกับเฮด ในรูป ODE จะได้ว่า $dQ = KdH$

จากนิยาม ค่า R สำหรับ laminar flow $R_l = \dfrac{dH}{dQ}$ และจาก ODEจะได้

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{1}{K}$$

ค่าคงที่



ค่า R สำหรับ laminar flow คำนวณได้จาก $R_l = \dfrac{H}{Q}$

โดยจะเป็นค่าคงที่

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบระดับของเหลว

Turbulent flow

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

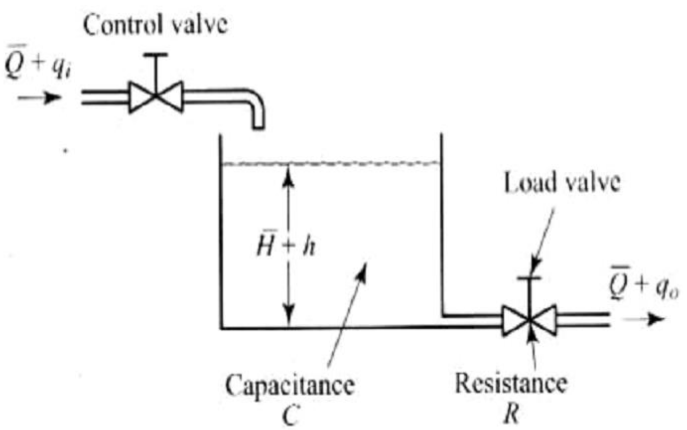
เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลกับเฮด ในภาวะคงที่ คือ $Q = K\sqrt{H}$

เมื่อเขียน ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลกับเฮด ในรูป ODE จะได้ว่า $dQ = \dfrac{K}{2\sqrt{H}}dH$

จากนิยาม ค่า R สำหรับ turbulent flow $R_t = \dfrac{dH}{dQ}$ และจาก ODE จะได้

$$\frac{dH}{dQ} = \frac{2\sqrt{H}}{K}$$

ค่าไม่คงที่



ค่า R สำหรับ turbulent flow คำนวณได้ $R_t = \dfrac{2H}{Q}$ จาก โดยจะเป็นค่าไม่คงที่

ค่า R สำหรับ turbulent flow จะขึ้นกับอัตราการไหลและเฮด อย่างไรก็ตาม อาจจะพิจารณาค่า R เป็นค่าคงที่ได้ ถ้าการเปลี่ยนแปลงของอัตราการไหลและเฮดมีค่าน้อย

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบระดับของเหลว

สมการอนุพันธ์ของระบบระดับของเหลว

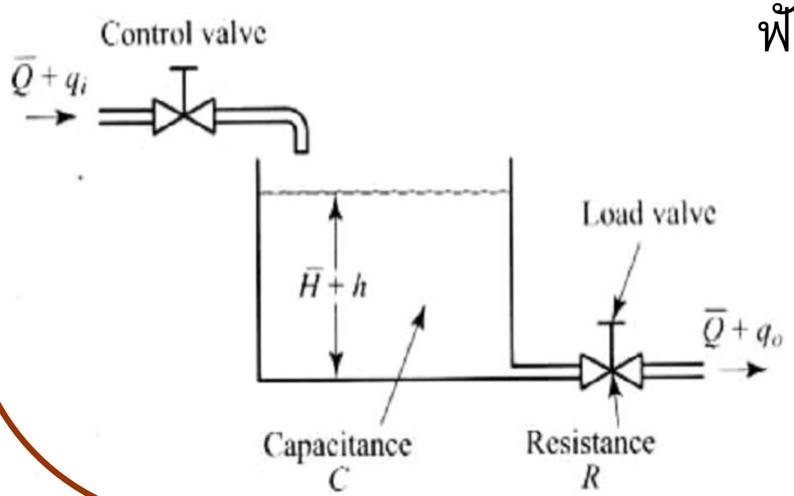
เมื่อพิจารณาให้เป็นระบบเชิงเส้น ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณน้ำในถังกับอัตราการไหล

$$C\frac{dh}{dt} = q_i - q_o$$

จากนิยาม R ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลออกกับเฮด $q_0 = \dfrac{h}{R}$

จะได้สมการ ODE ของระบบ คือ $$RC\frac{dh}{dt} + h = Rq_i$$

ผลการแปลงลาปลาส $$(RCs+1)H(s) = RQ_i(s)$$



ฟังก์ชันถ่ายโอน เมื่อ

$q_i = input; h = output$ $$G(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{RCs+1}$$

$q_i = input; q_o = output$ $$G(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบความร้อน

ระบบความร้อน (thermal systems)

- ประกอบด้วยส่วนประกอบสำคัญ คือ ตัวต้านทานความร้อน (thermal resistance, R) และความจุความร้อน (thermal capacitance, C)

$$R = \frac{d(\Delta T)}{dq}$$

- ค่า ΔT ความแตกต่างของอุณหภูมิ
- ค่า q อัตราการไหลของความร้อน

$$C = mc$$

- ค่า m มวลของสิ่งที่พิจารณา
- ค่า c ความร้อนจำเพาะของสิ่งที่พิจารณา

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบความร้อน

ค่า R ขึ้นอยู่กับรูปแบบการถ่ายเทความร้อน คือ การนำความร้อน การพาความร้อน และการแผ่รังสีความร้อน

การนำความร้อน

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของความร้อนกับความแตกต่างของอุณหภูมิ คือ

$$q = Ak\frac{\Delta T}{x} \Rightarrow R = \frac{x}{Ak}$$

ค่าคงที่

- ค่า k การนำความร้อนของวัสดุ
- ค่า A พท.หน้าตัดรับความร้อน
- ค่า x ความหนาของวัสดุ

การพาความร้อน

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของความร้อนกับความแตกต่างของอุณหภูมิ คือ

$$q = AH\Delta T \Rightarrow R = \frac{1}{AH}$$

- ค่า H สปส.การพาความร้อน

ค่าคงที่

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบความร้อน

การแผ่รังสีความร้อน

ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการไหลของความร้อนกับความแตกต่างของอุณหภูมิ คือ

$$q = k_r(T_1^4 - T_2^4)$$

- ค่า kr สปส.การแผ่รังสีของวัสดุ (ค่าน้อยมาก)
- ค่า T1 อุณหภูมิวัตถุแผ่รังสี
- ค่า T2 อุณหภูมิวัตถุรับรังสี

การแผ่รังสีจะมีค่าก็ต่อเมื่อ $T_1 \geq T_2$ ดังนั้น

$$\bar{T} = \sqrt[4]{T_1^4 - T_2^4}$$

$$q = k_r \bar{T}^4$$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{1}{4k_r\bar{T}^3}$$

ค่าไม่คงที่

- ค่า R ของการแผ่รังสีอาจพิจารณาให้คงที่ได้สำหรับช่วงการทำงานแคบ ๆ

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบพลศาสตร์

แบบจำลองตัวแปรสถานะ (state variable model)

ใช้สร้างแบบจำลองของระบบพลศาสตร์ในโดเมนเวลา (time domain)

ประกอบด้วยสมการ 2 สมการ คือ

State equation $\dot{x} = Ax + Bu$

Output equation $y = Cx + Du$

ตัวแปรที่เราสนใจ

x = state variable u = input y = output

A = state matrix B = input matrix C = output matrix

D = direct transmission matrix (โดยปกติ ระบบเชิงเส้น D = 0)

แบบจำลองตัวแปรสถานะของระบบทางกล

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

ถ้ามีปริมาณที่สนใจ 2 ค่า คือ การกระจัด และความเร็ว สามารถกำหนดให้

state variables

$$\begin{cases} x_1 = x(t) \\ x_2 = \dot{x} = \dfrac{dx(t)}{dt} \end{cases}$$

input $u = f(t)$

output $y = x(t)$

เขียนในรูปเมตริกซ์

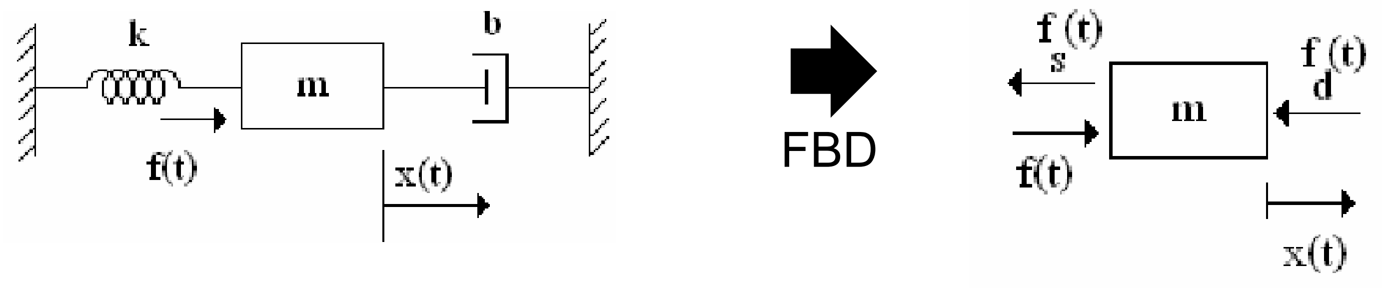
state equation $\dot{x} = Ax + Bu$ ➡ $\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2\end{bmatrix}u$

output equation $y = Cx + Du$ ➡ $y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2\end{bmatrix}u$

หาค่าของเมตริกซ์ A, B และ C

แบบจำลองตัวแปรสถานะของระบบทางกล

ตัวอย่างแบบจำลองตัวแปรสถานะของระบบทางกลแบบไถล



สร้างแบบจำลองตัวแปรสถานะจากสมการอนุพันธ์

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบพลศาสตร์

ความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองตัวแปรสถานะกับฟังก์ชันถ่ายโอน สำหรับระบบ SISO เท่านั้น

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

ผลการแปลงลาปลาซ ของชุดสมการ โดยให้ ค่าเริ่มต้นทั้งหมดเป็นศูนย์

$$L[\dot{x}] = L[Ax + Bu]$$

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

Identity matrix

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$L[y] = L[Cx + Du]$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

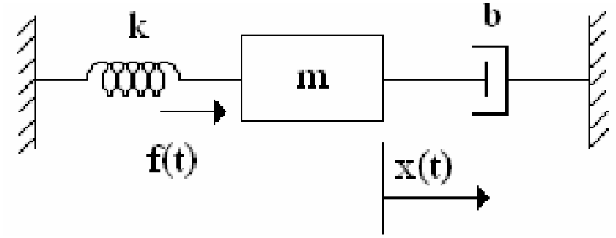
แทนค่า X(s) $\quad Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$

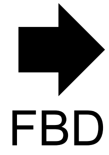
$$D = 0;$$

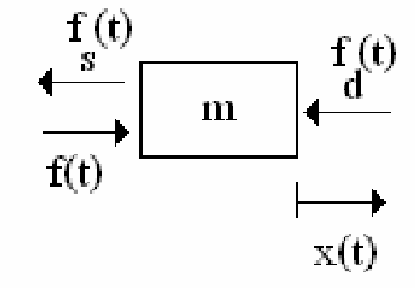
$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B}$$

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบพลศาสตร์

จงแปลงแบบจำลองตัวแปรสถานะเป็นฟังก์ชันถ่ายโอน







$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B}$$

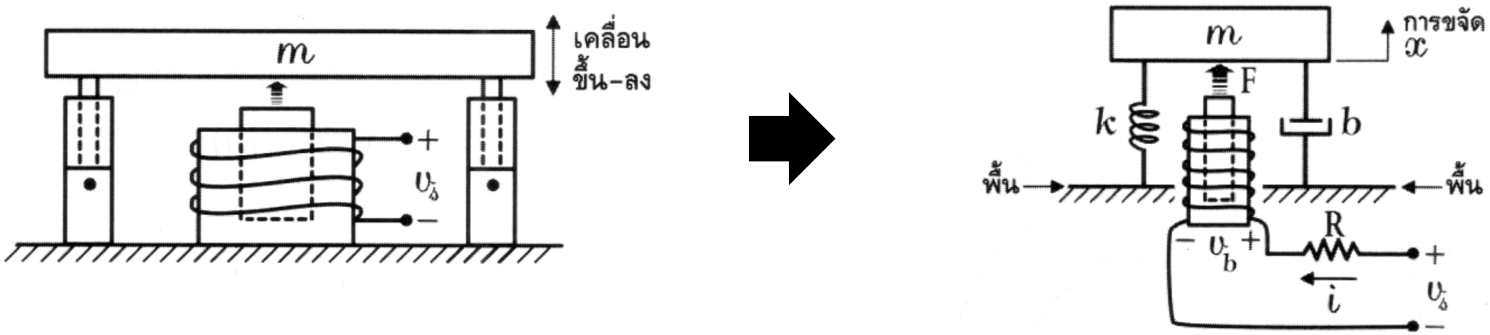
แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบทางไฟฟ้า

การบ้าน

1.1 จงหาแบบจำลองตัวแปรสถานะของการควบคุมโต๊ะเขย่าของเหลวใน ตัวอย่างที่ 2.9 โดยกำหนดให้ $x_1 = x \qquad u = v_s$

$$x_2 = \dot{x} \qquad y = x$$

1.2 จงแปลงแบบจำลองตัวแปรสถานะของข้อ 1.1 ให้เป็นฟังก์ชันถ่ายโอน



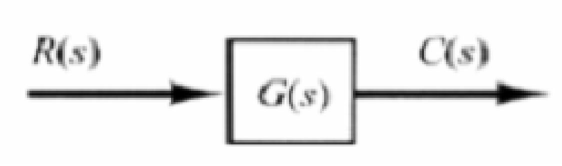
โต๊ะเขย่า

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

การเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเอาต์พุตกับอินพุตของระบบ สามารถกระทำได้ด้วยการใช้รูปภาพ เรียกว่า **แผนภาพบล็อก** และ**แผนภาพการไหลสัญญาณ**

Transfer function

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \quad \Rightarrow \quad C(s) = G(s)R(s)$$

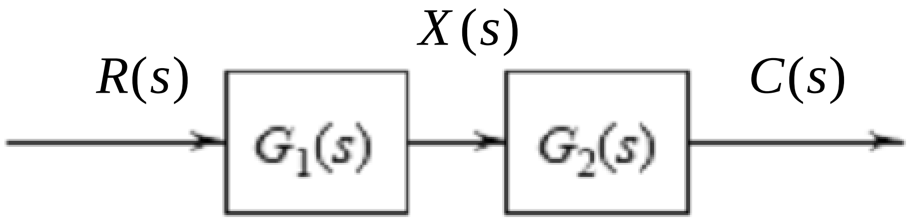


block diagram

signal-flow graph

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

ระบบย่อยต่อกันแบบอนุกรม (series)



หาฟังก์ชันถ่ายโอน $$G_e(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = ?$$

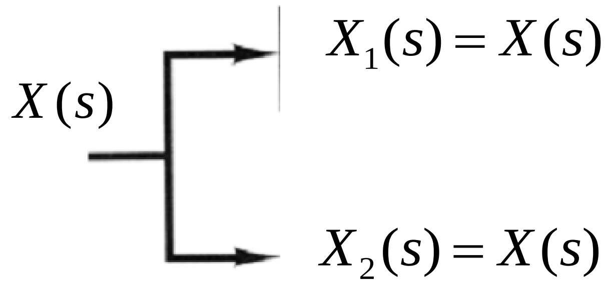
$$X(s) = G_1(s)R(s)$$

$$\begin{aligned} C(s) &= G_2(s)X(s) \\ &= G_2(s)G_1(s)R(s) \end{aligned}$$

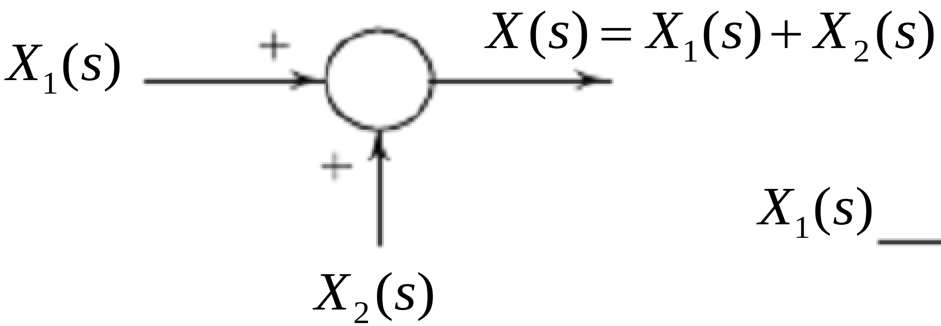
$$G_e(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

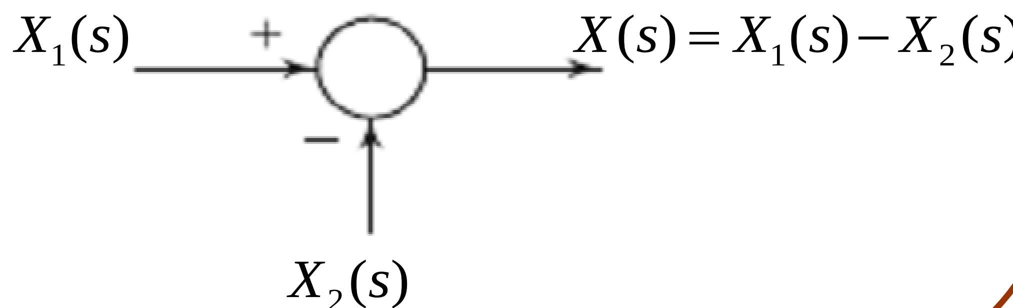
แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

จุดแยกสัญญาณ



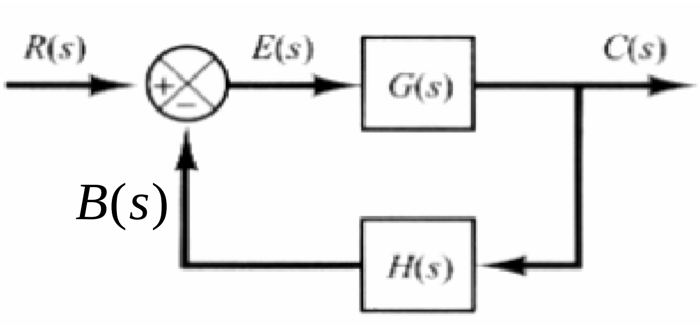
จุดรวมสัญญาณ



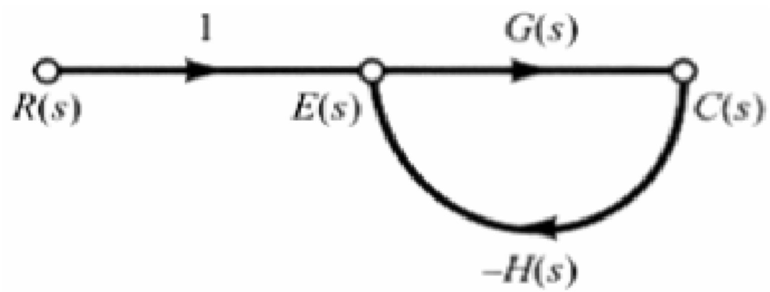


แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

Feedback control system



Block diagram



Signal-flow graph

จงหา transfer function $T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)} = ?$

$$C(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$B(s) = H(s)C(s)$$

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

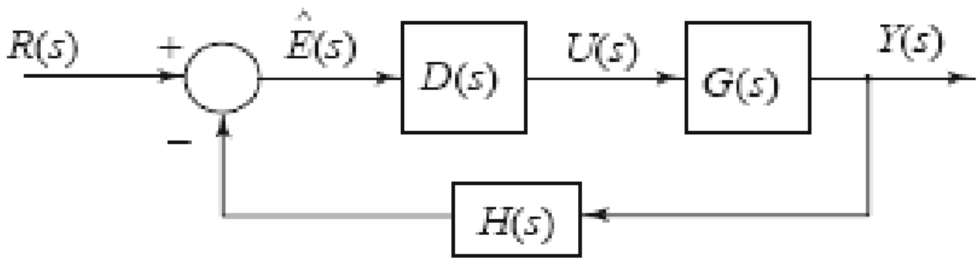
เรียก $G(s)H(s)$

ฟังก์ชันถ่ายโอนวงเปิด

(open-loop transfer function)

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

Feedback control system



Block diagram

จงหา transfer function $T(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = ?$

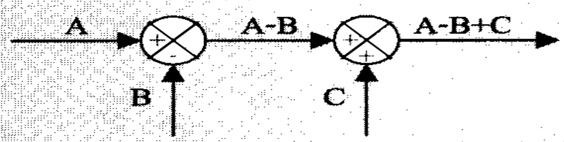
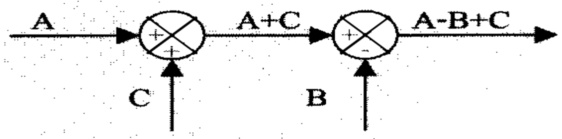
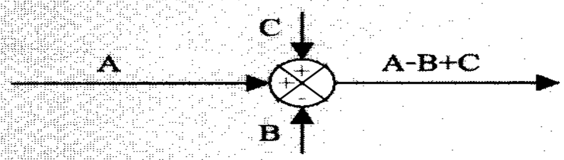
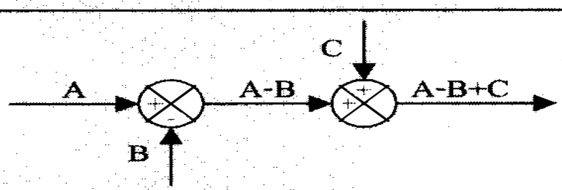
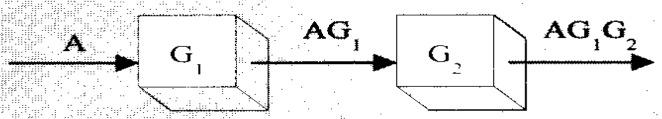
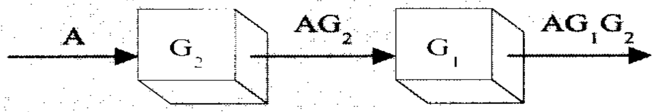
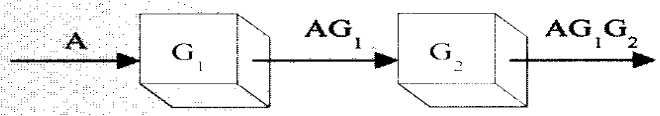
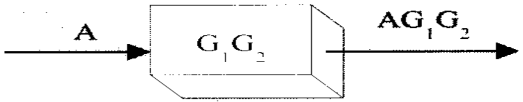
$$Y(s) = D(s)G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

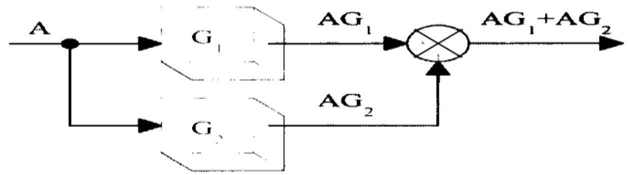
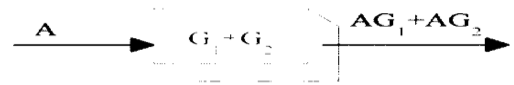
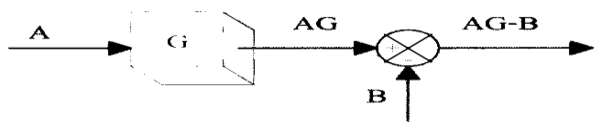
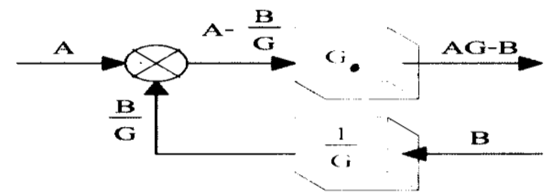
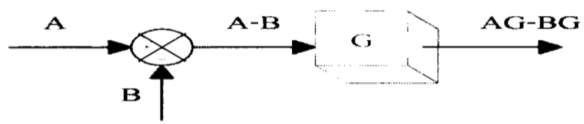
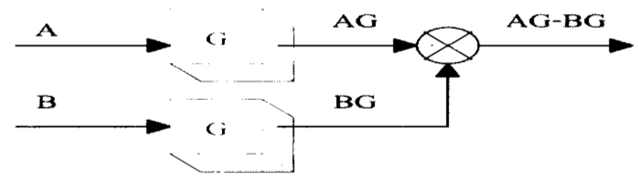
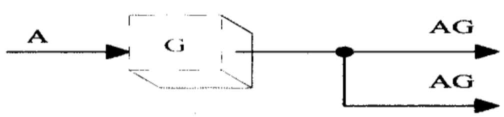
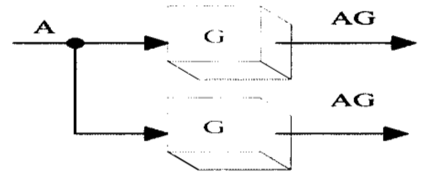
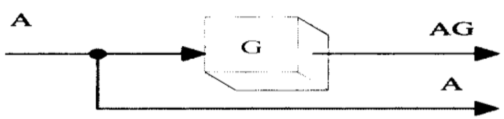
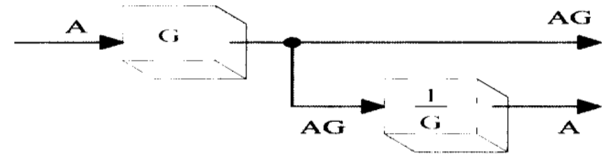
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)H(s)}$$

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

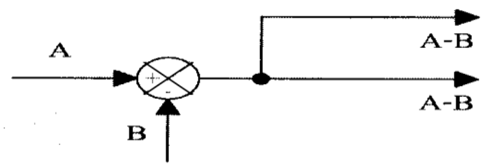
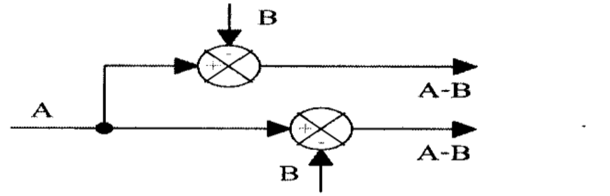
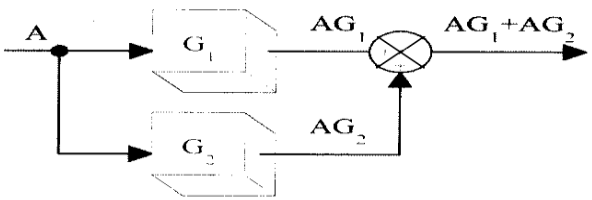
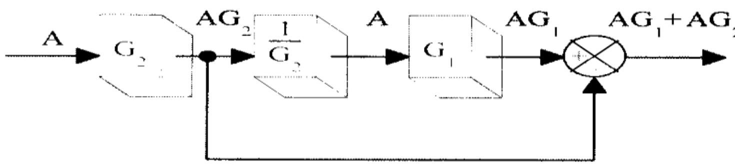
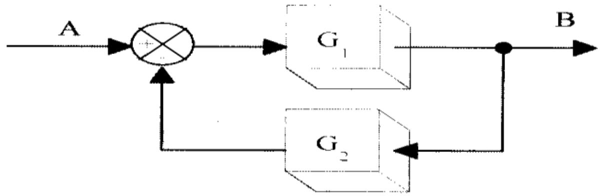
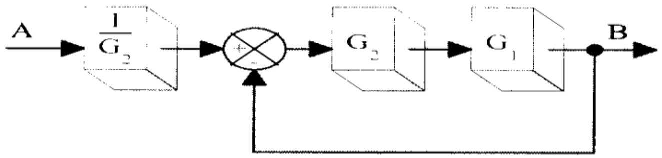
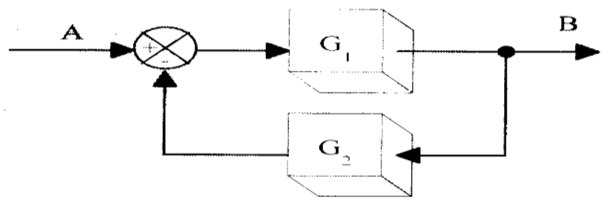
ตารางที่ 3-8 แสดงการลดรูปบล็อกไดอะแกรม

	Original block diagrams	Equivalent block diagrams
1		
2		
3		
4		

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

5		
6		
7		
8		
9		

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

10		
11		
12		
13		

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

ตัวอย่าง 2.14 หน้า 47

ตัวอย่าง 2.15 หน้า 49

ข้อ 2.14 หน้า 59

แบบจำลองคณิตศาสตร์ของระบบพลศาสตร์

การบ้าน

ข้อ 2.13 หน้า 59

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

การทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization)

เป็น การแปลงสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) ให้เป็นเป็น สมการเชิงเส้น (linear equation) อาจทำได้โดยอาศัย การกระจายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

สมมติ มี nonlinear function $f(x)$ ที่กำลังกระทำอยู่ที่ x_0 เราอาจกระจาย $f(x)$ ด้วยอนุกรมเทเลอร์

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \boxed{\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots}$$

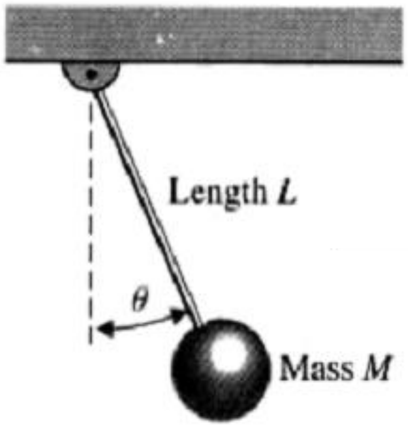
$x \approx x_0$

ในการหาอนุพันธ์กระทำโดยรอบจุด x_0 ซึ่งหมายถึง x และ x_o มีค่าใกล้เคียงกันมาก ดังนั้น เราสามารถตัดทอนอนุพันธ์อันดับสูง ๆ ออกไปได้ โดยไม่ทำให้สูญเสียความถูกต้อง ดังนั้นจะได้สมการเชิงเส้น คือ

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

แผนภาพบล็อก และแผนภาพการไหลสัญญาณ

ตัวอย่าง ลูกตุ้มแกว่งไปมา



หาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการแกว่งของลูกตุ้ม